Краткие сообщения по физике № 5 1977

ОСОБЫЕ ЛИНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕ

С. И. Сыроватский

УДК 533.9:523.76

С помощью приближения адиабатически медленных движений идеально проводящей плазмы показано, что в общем трехмерном магнитном поле особыми линиями, на которых могут появляться сильные токи и идти процесс перезамыкания, являются замкнутые силовые линии или линии, замыкающиеся на неподвижных проводниках.

Процесс пересоединения магнитных силовых линий в хорошо проводящей плазме обычно рассматривается в простой двумерной геометрии /I/. Такая модель является простейшей моделью солнечных вспышек и других подобных процессов в космосе /2/. В рамках этой модели показано, что местом, где возникают сильные токи в форме токовых слоев, являются нулевые точки (в пространстве - линии) магнитного поля /3/. Вместе с тем, в связи с задачей прогнозирования солнечных вспышек, а также исследованиями процесса перезамыкания в устройствах для удержания плазмы /4/ возникает вопрос: что служит аналогом нулевых линий в общем трехмерном случае? Могут ли и где именно появляться сильные токи и токовые слои в магнитном поле, не обладающем двумерной или какой-либо иной симметрией?

Мы покажем ниже, что в общем случае такими особыми линиями являются замкнутые силовые линии или силовые линии, замыкающиеся на неподвижных проводниках.

Для доказательства воспользуемся системой уравнений магнитной гидродинамики, записанной в безразмерной форме:

$$\varepsilon^{m} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \varepsilon^{s} \nabla p - [\vec{H}\ \mathrm{rot}\vec{H}]; \tag{I}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \mathrm{rot}\vec{E}; \tag{2}$$

$$\vec{E} = - [\vec{v}\ \vec{H}] + \varepsilon^{\sigma}\, \mathrm{rot}\vec{H}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\vec{v}. \qquad (4)$$

Здесь

$$\varepsilon^{m} = v_0^2/v_A^2, \quad \varepsilon^{s} = v_s^2/v_A^2, \quad \varepsilon^{\sigma} = \nu_m/v_0 R_0 \qquad (5)$$

– безразмерные параметры задачи, v_0 и R_0 – характерные скорость и масштаб, v_s и v_A – характерные значения звуковой и альвеновской скорости, ν_m – магнитная вязкость. Уравнения (I)–(4) должны быть дополнены уравнением энергии или, в простейшем случае, уравнением политропы $p = \rho^{\gamma}$ с некоторым эффективным значением показателя γ. Однако для дальнейшего конкретный вид уравнения энергии не играет роли.

Будем считать

$$\varepsilon \ll 1, \quad m>0, \quad \sigma>0, \qquad (6)$$

а показатель s произвольным. Это соответствует приближению адиабатически медленных движений хорошо проводящей плазмы. В нулевом порядке по ε уравнения (I)–(4) сводятся к следующим:

$$\varepsilon^{s}\nabla p_0 + [\vec{H}_0 \operatorname{rot}\vec{H}_0] = 0; \qquad (7)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_0 = -\frac{\partial\vec{H}_0}{\partial t}; \qquad (8)$$

$$\vec{E}_0 = -[\vec{v}_0 \vec{H}_0]; \qquad (9)$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dt}. \qquad (10)$$

Решение $p_0(\vec{r},t)$ и $\vec{H}_0(\vec{r},t)$ первого из этих уравнений с дополнительным условием $\operatorname{div}\vec{H}_0 = 0$ определяет равновесную конфигурацию плазмы, параметрически зависящую от времени, например, в силу зависимости от времени граничных условий или термодинамических параметров плазмы. Остальные уравнения при известных $\vec{H}_0$ и p_0 определяют электрическое поле $\vec{E}_0$, скорость $\vec{v}_0$ и плотность ρ_0 плазмы. Легко убедиться, однако, что при определенных условиях система уравнений нулевого приближения не имеет решений. В самом деле, уравнение (8) определяет электрическое поле с точностью до градиента некоторой функции:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_c - \nabla\varphi, \tag{11}$$

где $\vec{E}_c$ - частное решение уравнения (8) с известной правой частью. Для функции φ из (9) получаем уравнение $\vec{H}_0\vec{E}_0 = 0$, т.е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l_H} = \vec{l}_H\vec{E}_c, \tag{12}$$

где дифференцирование ведется вдоль магнитного поля и $\vec{l}_H$ - единичный вектор в этом направлении. В присутствии замкнутых силовых линий интеграл от левой части уравнения (12) по такой линии (контур L) тождественно равен нулю. В то же время интеграл от правой части

$$\oint\limits_L \vec{E}_c d\vec{l}_H = \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{H}_0 d\vec{S} \tag{13}$$

в общем случае произвольных деформаций (ограниченных только уравнением (7)), очевидно, не равен нулю.

Таким образом, в присутствии замкнутых силовых линий, охватывающих изменяющийся магнитный поток, уравнения (7)-(9) оказываются противоречивыми. Это значит, что в окрестности таких линий либо несправедливо использованное адиабатическое приближение, (т.е. нельзя пренебречь левой частью уравнения (1)), либо нельзя пренебрегать сопротивлением плазмы. Первая возможность соответствует своеобразному кумулятивному эффекту: при сколь угодно малой граничной скорости v_0 скорость вблизи особой линии всегда достигает значений $\sim v_A$. Во втором случае при сколь угодно высокой проводимости плотность тока $\vec{j} = \mathrm{rot}\vec{H}_0$ должна достигать таких больших значений, что нельзя пренебречь в (3) последним (диссипативным) членом. В обоих случаях замкнутая силовая линия с отличной от нуля циркуляцией вихревого электрического поля является особой линией задачи: в ее окрестности нарушается непрерывность решения нулевого приближения по параметру ε.

Этот результат имеет простой физический смысл. В отличие от контура, пересекающего магнитные силовые линии, на замкнутой силовой линии не может существовать потенциальное поле поляризации, устраняющее вихревое электрическое поле. Поэтому на замкнутых линиях возможно отличное от нуля (вихревое) электрическое поле, которое при высокой проводимости плазмы вызывает сильный электрический ток.

Очевидно, аналогичную роль играют силовые линии, замыкающиеся на неподвижных проводниках, поскольку последние, согласно (9), не дают вклада в электрическое поле. Заметим, что результаты остаются в силе и при использовании обобщенного закона Ома, учитывающего анизотропию проводимости и ток Холла.

Как ясно из предыдущего, в тороидальных магнитных полях с винтовой симметрией, используемых для удержания плазмы, опасными в отношении перезамыкания будут лишь силовые линии с рациональным отношением шага винта к длине обхода тора. Такие линии замыкаются после одного или нескольких оборотов. При этом, разумеется, наиболее опасны из них самые короткие, с минимальным импедансом. Для линий, замыкающихся лишь после многих обходов, отличие от незамкнутых практически исчезает.

Подчеркнем, что условие рациональности является следствием тороидальной симметрии таких полей. Физическое требование сводится к замкнутости магнитных силовых линий и остается в силе для произвольных полей.

Поступила в редакцию
27 января 1977 г.

Литература

1. С. И. Сыроватский, Известия АН СССР, сер. физ., 39, 359 (1975).
2. С. И. Сыроватский, Труды 5-й Всесоюзной ежегодной школы по космофизике, Апатиты, 1968 г., стр. 58.
3. С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, 60, 1727 (1971).
4. Б. Б. Кадомцев, Физика плазмы, 1, 710 (1975).