Краткие сообщения по физике № 7 1977

УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ НА АСИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ ЛИНИИ

К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас

УДК 621.375.823

Устойчивость генерации ядерных зеемановских мазеров и спиновых генераторов исследована методом, позволяющим рассматривать конечное число степеней свободы.

Устойчивость генерации, частота которой контролируется неоднородно уширенной линией ядерного магнитного резонанса, рассматривалась в работах /1/. Распределение резонансных частот вещества характеризовалось четной форм-функцией $g(h) = g(h;\delta)$; где h – расстройка, отнесенная к релаксационной полуширине линии, δ – характерная полуширина распределения частот, параметр подобия. Было показано, что допустимая величина неоднородного уширения существенным образом зависит от конкретного вида форм-функции. В настоящей работе исследуется устойчивость генерации на асимметричной неоднородно уширенной линии.

Предполагается, что процессы в веществе характеризуются уравнениями Блоха /2/, $T_1 = T_2$, резонатор имеет низкую добротность и настроен на частоту генерации. Соответствующие уравнения асимметричной задачи

$$\frac{dp}{dt} + p - (h - \nu)q - kr\bar{p} = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} + q + (h - \nu)p - kr\bar{q} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{dr}{dt} + r + k(\bar{p}p + \bar{q}q) = 1$$

записаны во вращающейся системе координат, в которой стационарное решение не зависит от времени. Здесь ν – безразмерная скорость вращения этой системы относительно системы, в которой определена форм-функция ν, q, r – локальные, $\bar{p}$, $\bar{q}$ – осредненные с весом $g(h)$ значения безразмерных компонент ядерной намагниченности, k – коэффициент усиления. Уравнения выписаны для спинового генератора; уравнения мазера отличаются знаками правой части и коэффициента усиления, что не вносит изменений в исследование устойчивости.

Стационарное решение ищется в виде

$$p_0 = s\left[1 + s^2 + (h - \nu)^2\right]^{-1}, \ldots,$$

где $s = k\bar{p}_0$ – безразмерная амплитуда радиочастотного поля. Условием стационарности, определяющим частоту генерации, является уравнение $\bar{q}_0 = 0$, или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h - \nu)g(h)dh}{1 + s^2 + (h - \nu)^2} = 0. \qquad (2)$$

Для четных форм-функций всегда существует исследованное в /I/ решение $\nu = 0$. Это решение обладает важным свойством <u>изохронности</u> – частота генерации не зависит от амплитуды радиочастотного поля в резонаторе. В общем случае уравнение (2) определяет некоторую зависимость частоты от амплитуды. Уравнение может иметь для заданных условий несколько решений, обладающих различными в смысле устойчивости свойствами.

Как и в более простом случае симметричных форм-функций, основные результаты в исследовании устойчивости удается получить, рассматривая вместо интегро-дифференциальных уравнений (I) системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этой цели используется метод моментов /I/. Конечные, обрывающиеся системы уравнений в моментах получаются, если ввести форм-функции

$$g_n(h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(h - h_i), \qquad (3)$$

где $f(x)$ – дельта-функция Дирака, постоянные α_i, h_i – выбираются таким образом, чтобы приравнять $2n$ первых моментов форм-функции (3) и заданной произвольной форм-функции. Этот прием соответствует замене в уравнениях (I) точных значений интегралов $\bar{p}$, $\bar{q}$ их приближенными значениями, вычисленными методом Гаусса /3/ с весовой функцией $g(h)$. Область применимости полученных таким путем результатов можно указать из общих соображений. В сильных радиочастотных полях $(s \gg 1)$ зависимости величин p, q, r от параметра расстройки h имеют более плавный ход и использование небольшого числа ординат при вычислении интегралов по h допустимо. Эти качественные соображения подтверждаются результатами вычислений, которые оказываются асимптотически точными при больших значениях параметра s. Уравнения в моментах для произвольного n имеют вид ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$)

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} + x^{(i)} - \delta y^{(i+1)} + \vartheta y^{(i)} - kx^{(o)}z^{(i)} = 0,$$

$$\frac{dy^{(i)}}{dt} + y^{(i)} + \delta x^{(i+1)} - \vartheta x^{(i)} - ky^{(o)}z^{(i)} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{dz^{(i)}}{dt} + z^{(i)} + k(x^{(o)}x^{(i)} + y^{(o)}y^{(i)}) = m_i,$$

где $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$, m_i – моменты p, q, r, $g(h)$, поделенные на соответствующие степени параметра подобия δ. Замкнутость системы (4) обеспечивается существованием в силу определения (3) тождественных соотношений между моментами.

Рассмотрим простейшее из приближений, которые дает метод моментов, – асимметричную раздвоенную линию, т.е. форм-функцию

$$g_2(h) = \frac{1}{2}\left[(1 - \beta)f(h + \delta) + (1 + \beta)f(h - \delta)\right], \qquad (5)$$

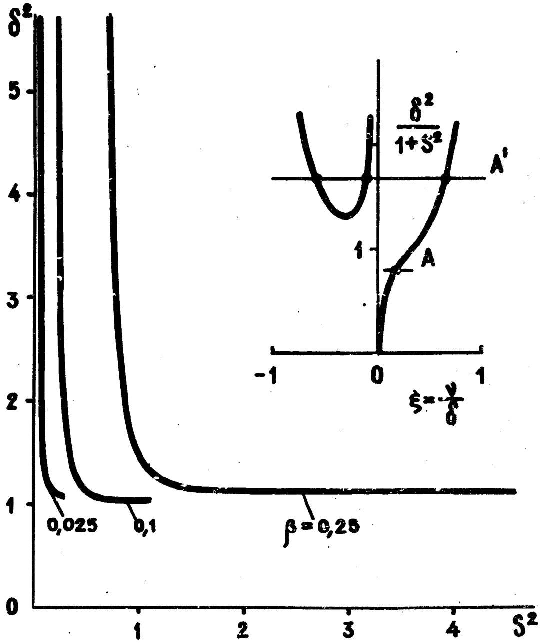
где β – постоянная. Уравнение (2) для этого случая имеет вид

$$\frac{\delta^2}{1 + s^2} = \frac{\xi - \beta}{(\xi + \beta)(1 - \xi^2)}, \qquad (6)$$

где $\xi = \vartheta/\delta$. В зависимости от значений параметра $\delta^2/(1 + s^2)$ это уравнение имеет одно или три действительных решения (рис. I). Характеристическое уравнение системы уравнений для малых отклонений от стационарного решения имеет вид

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda^4 + a_1\lambda^3 + \ldots + a_4) = 0, \qquad (7)$$

где $a_1, \dots, a_4$ – многочлены, функции параметров s^2, δ^2, ν^2. Применение критериев Гурвица показывает, что устойчивыми могут быть только стационарные режимы типа A, A'. Границы области



Р и с. I. Стационарные решения A, A' и границы области устойчивости для форм-функции (5)

устойчивости показаны на рис. I. В отличие от симметричной задачи оказывается возможной устойчивая генерация при большом неоднородном уширении. В случае четных форм-функций возмущения $\{\bar{p}_1, \bar{q}_1\}$ вектора $\{\bar{p}, \bar{q}\}$ совпадают по направлению со стационарным решением; возмущения поля в резонаторе сводятся к появлению малой амплитудной модуляции. Для асимметричных форм-функций возмущения отличаются примесью фазовой модуляции.

Уравнениям (I) соответствует линейная связь между ядерной намагниченностью и полем в резонаторе. Помимо этих уравнений были исследованы обсуждавшиеся ранее для более простых случаев уравнения для жестко-нелинейной обратной связи. Предполагалось, что амплитуда поля в резонаторе постоянна, а ядерная намагниченность контролирует только фазу радиочастотного поля. Вычисления, проделанные для форм-функции (5), показали, что введение нелинейности расширяет область устойчивости и вызывает появление новых устойчивых режимов.

Авторы благодарят В. И. Пелипенко и В. А. Молодцову за большую помощь в организации численных вычислений.

Поступила в редакцию
28 марта 1977 г.

Литература

1. К. В. Владимирский, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 41 (1971); № 3, 47 (1972); № 5,19 (1973); Диссертация, М., 1974 г.
2. F. Bloch, Phys. Rev., 70, 460 (1946).
3. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, ГТТИ, Москва - Ленинград, 1950 г.