Краткие сообщения по физике № 8 1977

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВО ВРЕМЕНИ КВАДРАТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Е. В. Иванова, И. А. Малкин, В. И. Манько

УДК 530.145

Методом интегралов движения рассчитано индуцированное излучение периодических во времени квадратичных по координатам и импульсам систем при переходах между квазиэнергетическими состояниями (КЭС). Получены условия индуцированного излучения на главной частоте и на частотах сателлитов. Предложен новый способ построения КЭС и спектра КЭ таких систем.

Цель работы - расчет методом интегралов движения индуцированного излучения широкого класса систем, которые могут быть описаны $3N$-мерным периодическим во времени гамильтонианом вида ($c = \hbar = 1$)

$$H(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{6N} B_{\alpha\beta}(t)Q_\alpha Q_\beta + \Phi(t) \equiv \vec{Q}B(t)\vec{Q} + \Phi(t), \qquad (I)$$

где $B(t) = B(t + T)$ - действительная симметрическая $6N$-мерная матрица, $\Phi(t) = \Phi(t + T)$ - периодическая функция времени; $6N$-мерный вектор $\vec{Q}$ построен по закону: $Q_1 = p_1; \ldots; Q_{3N} = p_{3N}; Q_{3N+1} = q_1; \ldots; Q_{6N} = q_{3N}$, где $p_j = -i\partial/\partial q_j$; $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_{3N}) = (\vec{q}^{\,1}, \ldots, \vec{q}^{\,b}, \ldots, \vec{q}^{\,N})$, а $\vec{q}^{\,b}$ - оператор координат заряженной частицы с номером b.

Для системы с гамильтонианом (I) в работе /I/ были построены $6N$ интегралов движения $I_\alpha(t)$:

$$\vec{I}(t) = \Lambda(t)\vec{Q}; \quad \Lambda = \widetilde{T}\exp\left|2i\int_0^t \sigma_2 B d\tau\right|, \qquad (2)$$

где σ_2 – блочная матрица Паули.

Рассмотрим такие квантовые системы (I), для которых соответствующие классические системы сильно устойчивы /2/. Матрицантом /2/ классической системы, соответствующей квантовой системе (I), как легко видеть из (2), является матрица $\Lambda^{-1}(t)$. Однако далее запись будем вести для матрицы $\tilde{\Lambda}$, где знак $\sim$ означает операцию транспонирования. Это возможно в силу симплектичности матрицы Λ и оказывается удобным при расчете излучения.

Пусть собственные значения матрицы $\tilde{\Lambda}(T)$ различны. Тогда в случае сильно устойчивых систем имеем /2/:

$$\begin{gathered}
\tilde{\Lambda}(T)\vec{f}^{(j)} = \exp(i\omega_j)\vec{f}^{(j)}; \quad \omega_j > 0; \\
\vec{f}^{(3N+j)} = \vec{f}^{(j)*}; \; \vec{f}^{(j)}\sigma_2\vec{f}^{(k)*} = \pm\,\delta_{j,k}; \\
\omega_j \neq \omega s/2; \quad \omega_j \pm \omega_k \neq \omega s; \quad j \neq k; \; \omega = 2\pi/T; \\
j = 1, \ldots, 3N; \; s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; .
\end{gathered} \tag{3}$$

Введем ооозначения

$$\begin{gathered}
\Omega_j = \mathrm{sign}(\vec{f}^{(j)}\sigma_2\vec{f}^{(j)*})\omega_j/T; \\
\vec{F}^{(j)} = \begin{cases} \vec{f}^{(j)}, & \text{если } \Omega_j > 0 \\ \vec{f}^{(j)*}, & \text{если } \Omega_j < 0. \end{cases}
\end{gathered} \tag{4}$$

Построим интегралы движения $A_j(t)$ следующим образом:

$$A_j(t) = \vec{I}(t)\vec{F}^{(j)}. \tag{5}$$

В силу (2) – (4) операторы $A_j(t)$, $A_j^+(t)$ удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям, при этом $A_j(T) = \exp(i\Omega_j T)A_j(0)$.

Отсюда следует, что собственные функции $|n;\, t\rangle$ операторов $A_j^+A_j$ являются квазиэнергетическими состояниями КЭС /3,4/, т.е. удовлетворяют условию

$$|\vec{n};\, t + T\rangle = \exp\left[-\,iT\left(E_0 + \sum_{j=1}^{3N}\Omega_j n_j\right)\right]|\vec{n};\, t\rangle; \; n_j = 0, 1, \ldots \; , \tag{6}$$

где E_0 определяется фазой КЭС. Детали вычислений приведены в /5 (1976)/. Отметим, что в рассматриваемом случае сильно устойчивой классической системы соответствующая квантовая система имеет дискретный спектр квазиэнергий /КЭ/.

Следует подчеркнуть, что аналогичным образом строятся интегралы движения (см. (5)), определяющие КЭС и спектр КЭ, и в тех случаях, когда $|\lambda_\alpha| \neq 1$, где λ_α - собственные значения матрицы $\tilde{\Lambda}(T)$; при этом система имеет непрерывный или смешанный спектр КЭ.

Рассмотрим теперь излучение системы (I) в случае дискретного спектра КЭ. Следуя схеме расчета излучения нестационарных квадратичных систем, предложенной в /5/, использующей их интегралы движения и представление когерентных состояний, выразим гамильтониан взаимодействия системы (I) с полем излучения через интегралы движения $A_j(t)$, $A_j^+(t)$ (5). При этом экспоненциальные операторы $\exp(\pm i\vec{k}_\lambda \vec{q}^b)$, где $\vec{k}_\lambda$ - волновой вектор излучаемого фотона, можно представить как произведение унитарных вейлевских операторов сдвига.

При расчете индуцированного излучения ограничимся дипольным приближением. Обобщение вычислений на общий случай очевидно /5/, поскольку матричные элементы вейлевских операторов хорошо известны. Возможность дипольного приближения обусловлена тем, что рассматривается устойчивая система и, следовательно, можно полагать, что амплитуда малых колебаний, совершаемых системой, намного меньше, чем длина излучаемой волны.

Предположим для упрощения записи, что заряды взаимодействующих частиц одинаковы и равны e. Учтем также, что в соответствии с теоремой Флоке-Ляпунова /2/ матрицант $\Lambda^{-1}(t)$ можно представить в виде

$$\Lambda^{-1}(t) = U(t)\exp\left[\frac{t}{T}\ln\Lambda^{-1}(T)\right], \qquad (7)$$

где матрица $U(t) = U(t + T)$ - периодическая и разлагается далее в ряд Фурье.

При рассмотрении индуцированных процессов важен суммарный эффект одновременно идущих индуцированного излучения и индуцированного поглощения. Для средней за период T суммарной мощности дипольных индуцированных процессов излучения и поглощения фотона с частотой ω_λ, волновым вектором $\vec{k}_\lambda$ и вектором поляризации $\vec{e}_{\lambda\rho}$ в элемент телесного угла do в направлении $\vec{n}_\lambda = \vec{k}_\lambda/\omega_\lambda$ при переходах системы (I) из начального КЭС $|\vec{n}; t\rangle$ по все конечные КЭС получим следующее выражение:

$$P(\vec{n}_\lambda, \omega_\lambda = |\Omega_j - \omega l|, \vec{e}_{\lambda\rho}) = -4\pi^2 e^2 J_\rho(\vec{n}_\lambda, |\Omega_j - \omega l|) \times$$

$$\times |\vec{\eta}^{\,j}(l)\vec{\sigma}_{\lambda\rho}|^2/(\Omega_j - \omega l). \qquad (8)$$

Здесь $J_\rho(\vec{n}_\lambda, \omega_\lambda)$ – интенсивность внешнего излучения с частотой ω_λ и поляризацией $\vec{e}_{\lambda\rho}$, падающего в направлении $\vec{n}_\lambda$; $\vec{\sigma}_{\lambda\rho} = (\vec{e}_{\lambda\rho}, \ldots, \vec{e}_{\lambda\rho})$, где вектор $\vec{e}_{\lambda\rho}$ повторен N раз; $\vec{\eta}^{\,j}(l)$ – строка с номером j матрицы $\tilde{\varkappa}(l)$, являющейся членом ряда Фурье матрицы $\tilde{\varkappa}(t)$, которая определяется соотношениями

$$\varkappa(t) = 2i\left[B_1(U_2F_1^+ - U_1F_2^+) + B_2(U_4F_1^+ - U_3F_2^+)\right];$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 B_2 \\ B_3 B_4 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} F_1 F_2 \\ F_1^* F_2^* \end{pmatrix}; \quad (F_1 F_2) = \begin{pmatrix} F_1^1 \ldots F_{6N}^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_1^{3N} \ldots F_{6N}^{3N} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Из выражения (8) видно, что для $l = 0$ на частотах $\Omega_j > 0$ суммарным эффектом является индуцированное поглощение, а на частотах $|\Omega_j|$, $\Omega_j < 0$ – индуцированное излучение. Из выражения (8) видно также, что возможно получение индуцированного излучения на частотах $|\Omega_j - \omega l|$, если номера сателлитов l выбраны в соответствии с условием $\Omega_j - \omega l < 0$.

Отметим, что эффект дипольного индуцированного излучения квадратичной периодической во времени системой частного вида был получен ранее в работе /5 (1977)/.

Поступила в редакцию
26 января 1977 г.

Литература

I. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 5, 20, 27 (I97I).

2. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., "Наука", I972 г.

3. В. И. Ритус, ЖЭТФ, 5I, I544 (I966).

4. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 5I, I492 (I966); УФН, II0, I39 (I973).

5. Е. В. Иванова, И. А. Малкин, В. И. Манько, Phys. Lett., 50 A, 23 (I974); в сб. "Ускорители", вып XIУ, М., Атомиздат, I975 г., стр. I07; препринт ФИАН № I09, I976 г.; J. Phys., 10 A, L 75 (1977).