Краткие сообщения по физике № 9 1977

"МЕТАЛЛИЧЕСКОЕ" ОТРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В. И. Беляк

УДК 539.17

Показано, что при росте мнимой части оптического потенциала сечение поглощения достигает насыщения, а затем уменьшается из-за эффекта отражения. Вычислен эффект отражения, в том числе связанный с мнимой частью потенциала, в сечении поглощения на сильнопоглощающем прямоугольном потенциале. Произведена оценка эффекта отражения для конкретного ядерного оптического потенциала.

Известно, что сильнопоглощающая среда, например металл, является одновременно и сильноотражающей /1/ (такое отражение называют "металлическим"). В соответствии с этим представляет интерес аналитически учесть эффекты отражения в сечениях поглощения для сильнопоглощающих ядерных оптических потенциалов (применяемых, например, для описания взаимодействия с ядром сложных частиц). Имеющиеся выражения для этих сечений получены либо в эйкональном приближении /2/, не способном учитывать эффекты отражения, либо в модели /3/, не учитывающей эффект отражения, связанный с мнимой частью потенциала. В настоящей работе указан общий характер зависимости сечений поглощения от мнимой части потенциала, а затем в определенных приближениях (прямоугольный потенциал без учета кулоновского взаимодействия и др.) вычислены эффекты отражения в этих сечениях.

1. Рассеяние частиц будем описывать уравнением Шредингера или в релятивистском случае уравнением Клейна-Гордона. Эти уравнения запишем единым образом в виде

$$\left[\nabla^2 + k^2 n^2(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = 0, \qquad (1)$$

где $n(\vec{r})$ - комплексный коэффициент преломления, параметрически зависящий от волнового числа k падающих частиц и связанный соответствующим образом с оптическим потенциалом $U(\vec{r}) = -[V(\vec{r}) +$

$+ iW(\vec{r})]$. В дальнейшем для конкретности изложения будем иметь в виду нерелятивистский случай, когда $n^2(\vec{r}) = 1 - U(\vec{r})/E$, $E = \hbar^2 k^2/2m$. Однако все соотношения, выраженные через $n(\vec{r})$, справедливы и в релятивистском случае.

Сечение поглощения частиц σ_a в рассматриваемой задаче можно представить в виде

$$\sigma_a = k \int \mathrm{Im}\, n^2(\vec{r}) |\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r}. \qquad (2)$$

Так как при $\mathrm{Im}\, n^2(\vec{r}) \to \infty$ величина $\Psi(\vec{r}) \mathrm{Im}\, n^2(\vec{r})$ конечна (см. (I)) и следовательно $\mathrm{Im}\, n^2(\vec{r}) |\Psi(\vec{r})|^2 \to 0$, то из (2) вытекает следующее утверждение. Если во всей конечной области действия мнимой части потенциала величина $\mathrm{Im}\, n^2(\vec{r}) \to \infty$, т.е. глубина мнимой части потенциала $W(\vec{r}) \to \infty$, то сечение поглощения $\sigma_a \to 0$. Это явление происходит из-за эффекта отражения. С другой стороны, в области относительно малых значений $\mathrm{Im}\, n^2(\vec{r})$ и соответственно $W(\vec{r})$ рост этих величин приводит, очевидно, к росту σ_a.

2. Для иллюстрации этих явлений рассмотрим сечение поглощения на цилиндрическом прямоугольном потенциале радиуса R длины L с коэффициентом преломления $n = \sqrt{1 + (V_o + iW_o)/E}$ (при перпендикулярном падении частиц на плоскую поверхность потенциала). Такой потенциал широко используется для качественного рассмотрения взаимодействия частиц с ядрами (см., напр., /4/). Для простейшего учета эффектов поглощения и отражения подставим в (2) в качестве исходного приближения решение нашей задачи при $R \to \infty$. В результате получим

$$\sigma_a = \pi R^2 T_o \left\{1 - \exp(-2n_I kL)\left[1 + O(\mathcal{R}_o)\right]\right\}, \qquad (3)$$

$$\mathcal{R}_o = |(n-1)/(n+1)|^2, \quad T_o = 1 - \mathcal{R}_o = 4n_R/|n+1|^2; \qquad (4)$$

здесь и далее $n_R > 0$, $n_I > 0$ $(a_R \equiv \mathrm{Re}\, a,\ a_I \equiv \mathrm{Im}\, a)$.

При этом $\mathcal{R}_o$ является коэффициентом отражения от прямоугольной "стенки" с коэффициентом преломления n, а T_o – соответствующим коэффициентом прохождения. Выражение для $O(\mathcal{R}_o)$ из-за его относительной громоздкости здесь не приводим [ж)]. В пренебре-

---

ж) В случае сильного отталкивания ($\mathrm{Re}\, n^2 < 0$) соотношение $O(\mathcal{R}_o) \sim \mathcal{R}_o$ может нарушаться.

жении величинами порядка $(n-1)^2$ имеем $T_0 = 1$, $\mathcal{R}_0 = 0$, $O(\mathcal{R}_0) = 0$ и (3) переходит в обычное эйкональное выражение /2,4/.

Из (3), (4) можно увидеть следующие основные черты поведения σ_a. При увеличении от нуля мнимой части потенциала W_0 сечение поглощения σ_a сначала растет из-за уменьшения $\exp(-2n_I kL)$, т.е. за счет поглощения прошедшего внутрь потенциала потока, а затем достигает насыщения и начинает уменьшаться из-за увеличения $\mathcal{R}_0$, т.е. за счет отражения. При этом сильнопоглощающий потенциал, т.е. потенциал, мнимая часть которого столь велика, что $2n_I kL \gg 1$ и $\sigma_a \approx \pi R^2 T_0$, поглощает не всю падающую на него волну, а только ту ее часть, которая проходит внутрь него.

3. Перейдем к рассмотрению сечения поглощения на прямоугольном сферическом потенциале радиуса R с коэффициентом преломления n.

Рассмотрим сначала парциальное сечение поглощения s-волны ($l = 0$). Для сильнопоглощающих потенциалов, когда $\xi \equiv \exp(-2n_I kR) \ll 1$, это сечение удобно представить в виде

$$\sigma_a^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} T_0 \left[1 + O(\xi)\right], \tag{5}$$

$$\left[1 + O(\xi)\right] = \left[1 - 2\xi \frac{n_I}{n_R} \sin(2n_R kR) - \xi^2\right] \Big/ \left|1 + \xi \frac{n-1}{n+1} \exp(2in_R kR)\right|^2. \tag{6}$$

Здесь величину T_0, определяемую (4), можно трактовать как коэффициент прохождения поверхности потенциала для s-волны, а величина $O(\xi)$ учитывает эффекты, связанные с неполным поглощением прошедшей внутрь потенциала s-волны. Если в выражении (5) для σ_a отбросить $O(\xi)$ и формально считать n вещественным, то оно совпадает с соответствующим парциальным сечением, полученным в /3/.

Из (5), (6) опять виден эффект насыщения и последующего убывания сечения поглощения $\sigma_a^{(0)}$ при росте мнимой части потенциала. Этот эффект сохраняется и для парциальных сечений поглощения с $l > 0$, и для всего сечения поглощения в целом.

4. Рассмотрим теперь в целом сечение поглощения на прямоугольном сферическом потенциале при $kR \gg 1$. Будем считать потенциал

$+ iW(\vec r)]$. В дальнейшем для конкретности изложения будем иметь в виду нерелятивистский случай, когда $n^2(\vec r) = 1 - U(\vec r)/E$, $E = \hbar^2 k^2/2m$. Однако все соотношения, выраженные через $n(\vec r)$, справедливы и в релятивистском случае.

Сечение поглощения частиц σ_a в рассматриваемой задаче можно представить в виде

$$\sigma_a = k \int \mathrm{Im}\, n^2(\vec r) |\Psi(\vec r)|^2 d\vec r. \qquad (2)$$

Так как при $\mathrm{Im}\, n^2(\vec r) \to \infty$ величина $\Psi(\vec r) \mathrm{Im}\, n^2(\vec r)$ конечна (см. (I)) и следовательно $\mathrm{Im}\, n^2(\vec r) |\Psi(\vec r)|^2 \to 0$, то из (2) вытекает следующее утверждение. Если во всей конечной области действия мнимой части потенциала величина $\mathrm{Im}\, n^2(\vec r) \to \infty$, т.е. глубина мнимой части потенциала $W(\vec r) \to \infty$, то сечение поглощения $\sigma_a \to 0$. Это явление происходит из-за эффекта отражения. С другой стороны, в области относительно малых значений $\mathrm{Im}\, n^2(\vec r)$ и соответственно $W(\vec r)$ рост этих величин приводит, очевидно, к росту σ_a.

2. Для иллюстрации этих явлений рассмотрим сечение поглощения на цилиндрическом прямоугольном потенциале радиуса R длины L с коэффициентом преломления $n = \sqrt{1 + (V_0 + iW_0)/E}$ (при перпендикулярном падении частиц на плоскую поверхность потенциала). Такой потенциал широко используется для качественного рассмотрения взаимодействия частиц с ядрами (см., напр., /4/). Для простейшего учета эффектов поглощения и отражения подставим в (2) в качестве исходного приближения решение нашей задачи при $R \to \infty$. В результате получим

$$\sigma_a = \pi R^2 T_0 \left\{1 - \exp(-2n_I kL)\left[1 + O(\mathcal{R}_0)\right]\right\}, \qquad (3)$$

$$\mathcal{R}_0 = |(n-1)/(n+1)|^2, \quad T_0 = 1 - \mathcal{R}_0 = 4n_R/|n+1|^2; \qquad (4)$$

здесь и далее $n_R > 0$, $n_I > 0$ $(a_R \equiv \mathrm{Re}\, a,\ a_I \equiv \mathrm{Im}\, a)$.

При этом $\mathcal{R}_0$ является коэффициентом отражения от прямоугольной "стенки" с коэффициентом преломления n, а T_0 – соответствующим коэффициентом прохождения. Выражение для $O(\mathcal{R}_0)$ из-за его относительной громоздкости здесь не приводим [ж]. В пренебре-

---

[ж] В случае сильного отталкивания ($\mathrm{Re}\, n^2 < 0$) соотношение $O(\mathcal{R}_0) \sim \mathcal{R}_0$ может нарушаться.

жении величинами порядка $(n-1)^2$ имеем $T_0 = 1$, $\mathcal{R}_0 = 0$, $O(\mathcal{R}_0) = 0$ и (3) переходит в обычное эйкональное выражение /2,4/.

Из (3), (4) можно увидеть следующие основные черты поведения σ_a. При увеличении от нуля мнимой части потенциала W_0 сечение поглощения σ_a сначала растет из-за уменьшения $\exp(-2n_I kL)$, т.е. за счет поглощения прошедшего внутрь потенциала потока, а затем достигает насыщения и начинает уменьшаться из-за увеличения $\mathcal{R}_0$, т.е. за счет отражения. При этом сильнопоглощающий потенциал, т.е. потенциал, мнимая часть которого столь велика, что $2n_I kL \gg 1$ и $\sigma_a \approx \pi R^2 T_0$, поглощает не всю падающую на него волну, а только ту ее часть, которая проходит внутрь него.

3. Перейдем к рассмотрению сечения поглощения на прямоугольном сферическом потенциале радиуса R с коэффициентом преломления n.

Рассмотрим сначала парциальное сечение поглощения s-волны ($l = 0$). Для сильнопоглощающих потенциалов, когда $\xi \equiv \exp(-2n_I kR) \ll 1$, это сечение удобно представить в виде

$$\sigma_a^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} T_0 \left[1 + O(\xi)\right], \tag{5}$$

$$\left[1 + O(\xi)\right] = \left[1 - 2\xi \frac{n_I}{n_R} \sin(2n_R kR) - \xi^2\right] \Big/ \left|1 + \xi \frac{n-1}{n+1} \exp(2in_R kR)\right|^2. \tag{6}$$

Здесь величину T_0, определяемую (4), можно трактовать как коэффициент прохождения поверхности потенциала для s-волны, а величина $O(\xi)$ учитывает эффекты, связанные с неполным поглощением прошедшей внутрь потенциала s-волны. Если в выражении (5) для σ_a отбросить $O(\xi)$ и формально считать n вещественным, то оно совпадает с соответствующим парциальным сечением, полученным в /3/.

Из (5), (6) опять виден эффект насыщения и последующего убывания сечения поглощения $\sigma_a^{(0)}$ при росте мнимой части потенциала. Этот эффект сохраняется и для парциальных сечений поглощения с $l > 0$, и для всего сечения поглощения в целом.

4. Рассмотрим теперь в целом сечение поглощения на прямоугольном сферическом потенциале при $kR \gg 1$. Будем считать потенциал

сильнопоглощающим, т.е. полностью поглощающим прошедшую внутрь него волну. Необходимым условием этого (как видно из предыдущего рассмотрения) является $2n_I kR \gg 1$.

Исходим из выражения для сечения поглощения в виде суммы парциальных сечений

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)(1 - |S_l|^2), \quad S_l = \exp(2i\delta_l), \tag{7}$$

где для фаз $\delta_l \equiv \delta(\lambda)$ и связанных с ними $S_l \equiv S(\lambda)$ $(\lambda \equiv l + 1/2)$ используются асимптотические выражения [*)], соответствующие $kR \gg 1$, $|n|kR \gg 1$,

$$\delta(\lambda) = 0, \; S(\lambda) = 1 \quad \text{при} \quad \lambda > kR, \tag{8}$$

$$\delta(\lambda) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{(kR)^2 - \lambda^2}}{\sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2}}\, \operatorname{tg}\varphi(\lambda, nkR)\right] - \varphi(\lambda, kR) \quad \text{при} \quad \lambda < kR,$$

$$\varphi(\lambda, z) \equiv \sqrt{z^2 - \lambda^2} - \lambda \arccos(\lambda/z) + \pi/4. \tag{8'}$$

Для определенного выше сильнопоглощающего потенциала величину $\operatorname{tg}\varphi(\lambda, nkR)$ в (8') можно заменить на i. Тогда при $\lambda < kR$ имеем

$$S(\lambda) = \tilde{S}(\lambda)\exp\left[-2i\varphi(\lambda, kR)\right],$$

$$\tilde{S}(\lambda) = \frac{\sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2} - \sqrt{(kR)^2 - \lambda^2}}{\sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2} + \sqrt{(kR)^2 - \lambda^2}}. \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в (7) и заменяя суммирование на интегрирование (что допустимо в рассматриваемом приближении), получим

---

*) Нарушение этой асимптотики в некоторой малой по сравнению с kR окрестности точки $\lambda = kR$ не сказывается при $kR \to \infty$ на величине σ_a, по крайней мере, для притягивающего потенциала, который будем иметь в виду в дальнейшем.

$$\sigma_a = \pi R^2 \bar{T}, \quad \bar{T} = 1 - \bar{\mathcal{R}}, \tag{10}$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{2}{(kR)^2}\int_0^{kR} |\tilde{S}(\lambda)|^2 \lambda d\lambda = 2\int_0^1 \left|\frac{\sqrt{n^2 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{n^2 - x^2} + \sqrt{1 - x^2}}\right|^2 x dx.$$

При этом $\mathcal{R}(\lambda) = |\tilde{S}(\lambda)|^2$ и $T(\lambda) = 1 - \mathcal{R}(\lambda)$ можно трактовать как коэффициенты отражения и прохождения поверхности потенциала для l-той парциальной волны, а $\bar{\mathcal{R}}$ и $\bar{T}$ – как соответствующие величины для всей падающей волны. Выражение для $\bar{T}$ можно представить в виде

$$\bar{T} = \frac{2}{|n^2 - 1|^2}\Big\{\frac{1}{3}\Big[4(n^3 - n^2)_R - (|n^2| - 1)(n^2 + 1)_R +$$
$$+ (|n^2| - |n^2 - 1|)(|n^2 - 1|^2 - 3(n^2)_I^2)\Big] + (n^2)_I\Big[n(n^2 + 1) -$$
$$- (n^2 - 1)^2 \operatorname{arcth} n\Big]_I + (n^2)_I^2 (n^2 - 1)_R \ln\Big[n_R/(\sqrt{n^2 - 1})_R\Big]^2\Big\}. \tag{11}$$

При $|n^2| \gg 1$ имеем $\bar{T} = (8/3)(1/n)_R\left[1 - (3/2)(1/n)_R + \ldots\right]$.

Если $\left[(n^2)_I/(n^2 - 1)_R\right]^2 = (W_0/V_0)^2 \ll 1$, причем $(n^2)_R > 1$ (что часто выполняется для ядерных потенциалов), то имеет место следующее разложение $\bar{T}$ по степеням $(n^2)_I$:

$$\bar{T} = \bar{T}_0 - (n^2)_I^2 \left\{\frac{1}{n^2 - 1}\left[4 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{4n + 1}{n(n + 1)} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{3n + 1}{3(n + 1)^3}\right]\right\}_0 + \ldots,$$

$$\bar{T}_0 = (4/3)\left[(2n + 1)/(n + 1)^2\right]_0. \tag{12}$$

Здесь индекс 0 означает, что соответствующее выражение берется при $(n^2)_I = 0$ $(W_0 = 0)$. Далее, если $(n^2)_I = W_0/E$ увеличивается от 0 до ∞ при фиксированном $(n^2)_R > 1$, то $\bar{T}$ монотонно уменьшается от $\bar{T}_0$ до 0, а $\bar{\mathcal{R}}$ монотонно увеличивается от $\bar{\mathcal{R}}_0 = 1 - \bar{T}_0$ до I. Однако говорить о разделении вкладов от вещественной и мнимой частей потенциала в коэффициенте отражения $\bar{\mathfrak{R}}$ не имеет смысла из-за неаддитивности этих вкладов.

Отметим, что оценка /3/ эффекта отражения в σ_a с помощью выражений (4) при вещественных $n^2 > 1$ дает заниженный результат.

Для дальнейшего выяснения физического смысла полученных формул введем для l-той парциальной волны квазиклассический параметр $\rho = \lambda/k$ и квазиклассический угол падения Θ на поверхность потенциала, определяемый соотношением $\rho = R \sin \Theta$. Тогда величины $\mathfrak{R}(\lambda)$ и $T(\lambda)$, рассматриваемые как функции Θ, являются соответствующими френелевскими коэффициентами отражения и прохождения поверхности потенциала для l-той парциальной волны, а величины $\bar{\mathfrak{R}}$ и $\bar{T}$ являются коэффициентами отражения и прохождения поверхности потенциала для всей падающей волны. Так как в рассматриваемом приближении прошедшая внутрь потенциала волна полностью поглощается, то сечение поглощения определяется по существу только коэффициентом прохождения $\bar{T} = 1 - \bar{\mathfrak{R}}$.

5. В качестве конкретного примера оценим эффект отражения в сечении поглощения (сечении реакции) ионов ^3He с энергией $E_{лаб} = 29$ МэВ ядром ^{12}C, используя следующие параметры /5/ оптического потенциала: $V_0 = 67$ МэВ, $W_0 = 52$ МэВ. Эти параметры мы относим к прямоугольному потенциалу и не учитываем кулоновских эффектов. В рассматриваемом случае величины kR и $2n_I kR$ достаточно велики и для указанной оценки можно применить результаты пункта 4. Тогда согласно (II) получим $\bar{T} = 0{,}70$, т.е. вклад эффекта отражения в сечении поглощения составляет 30%. При этом $\bar{\mathfrak{R}}_0 = 0{,}25$; $\bar{\mathfrak{R}} - \bar{\mathfrak{R}}_0 = 0{,}05$. Последняя величина определяет увеличение отражения из-за наличия мнимой части потенциала.

Отметим, что для феноменологического описания сильного поглощения частиц ядрами мнимая часть оптического потенциала должна быть такой, чтобы увеличение отражения из-за нее было еще мало, а прошедшая внутрь ядра волна поглощалась уже почти полностью.

Автор благодарит Г. М. Ваградова, В. Е. Пафомова, В. А. Сергеева и А. В. Степанова за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
27 апреля 1977 г.

Литература

I. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, "Наука", М., 1973 г.
2. S. Fernbach, R. Serber, T. B. Taylor, Phys. Rev., 75, 1352 (1949).
3. H. Feshbach, V. F. Weisskopf, Phys, Rev., 76, 1550 (1949). Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954 г.
4. S. Barshay, V. Rostokin, G. Vagradov, Phys. Lett., 43B, 271 (1973).
5. П. Е. Ходгсон, Оптическая модель упругого рассеяния, Атомиздат, 1966 г.