*Краткие сообщения по физике № 10 1977*

# О НОРМИРОВКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША-ГОРДАНА ГРУППЫ $SU_3$

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 53.01

Получено компактное выражение в виде трехкратной суммы для нормировки производящих инвариантов, отвечающих коэффициентам Клебша-Гордана группы $SU_3$ наиболее общего вида. Результат позволяет осуществить построение алгебры Вигнера-Рака группы $SU_3$ методом производящих инвариантов.

Эффективное использование групп физических симметрий в конкретных расчетах требует создания теории коэффициентов Клебша-Гордана (ККГ) и их соединений (алгебры Вигнера-Рака) соответствующих групп, аналогичной теории угловых моментов. Одним из адекватных способов решения этой задачи является метод производящих инвариантов (ПИ) /1/. В работах /1-2/ в рамках этого метода была предложена схема рекуррентного построения ПИ для произвольных величин алгебр Вигнера-Рака групп $SU_n$, исходя из заданного ПИ для ККГ низшего (второго) ранга. Поскольку такие ПИ для группы $SU_2$ были известны ранее /3/, то результат работы /1/ автоматически давал полное решение указанной задачи для группы $SU_2$. В то же время для высших групп $SU_n$ $(n \geq 3)$ такие ПИ достаточно просто выписываются в общем случае только с точностью до нормировки $\rho(\ldots)$, вычисление которой представляет важную самостоятельную задачу /4,5/.

Цель настоящей работы - получение компактного выражения для нормировки $\rho(P_1Q_1; P_2Q_2; U,S,T)$ ПИ, отвечающих ККГ второго ранга группы $SU_3$ наиболее общего вида, что позволит замкнуть построение расчетного аппарата этой группы аналогично /1/ для случая группы $SU_2$. Наше решение существенным образом использует результаты работы /2/, обозначениям которой мы также следуем.

Как известно /4,5/, наиболее общее выражение ПИ для ККГ второго ранга группы $SU_3$ имеет вид

$$J^{U,S,T}_{P_1Q_1;P_2Q_2}(x_1,y_1;x_2,y_2;a,b) \equiv \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu} \begin{pmatrix} P_1Q_1 & P_2Q_2 & QP \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left| \begin{matrix} P_1Q_1 \\ \nu_1 \end{matrix} \right) (x_1,y_1) \left| \begin{matrix} P_2Q_2 \\ \nu_2 \end{matrix} \right) (x_2,y_2) \left| \begin{matrix} QP \\ \nu \end{matrix} \right) (a,b) = \rho(P_1Q_1;P_2Q_2;U,S,T) \times$$

$$\times [x_1ab]^{P_1-U-T} [x_2ab]^{P_2-U-S} [x_1y_1a]^{Q_1-S} [x_2y_2a]^{Q_2-T} [x_1x_2a]^{U} \times$$

$$\times [x_1x_2y_2]^{T} [x_1y_1x_2]^{S}, \qquad (I)$$

$$P = P_1 + P_2 - 2U - S - T, \qquad Q = Q_1 + Q_2 + U - S - T,$$

где $\begin{pmatrix} P_1Q_1 & P_2Q_2 & QP \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix}$ – коэффициент Вигнера третьего ранга группы $SU_3$ (связанный простым соотношением с ККГ второго ранга /5/), $\left| \begin{matrix} P_iQ_i \\ \nu_i \end{matrix} \right) (\ldots)$ – компоненты ортонормированного базиса неприводимого представления (НП) $D(P_1Q_1)$ группы $SU_3$, реализованные в виде однородных полиномов предписанных степеней от компонент векторов $x_1,y_1;x_2,\ldots$ . Серия таких ПИ для всех допустимых значений $U$, $S$, $T$ соответствует редукции $D(P_1Q_1)\times D(P_2Q_2) \to$ $\to D(P_1+P_2-2U-S-T\ Q_1+Q_2+U-S-T) \equiv D(PQ)$. Другая (дополнительная) серия ПИ, отвечающая редукции $D(P_1Q_1)D(P_2Q_2)\to D(P_1+P_2+U-S-T$ $Q_1+Q_2-2U-S-T) \equiv D(PQ)$, получается из (I) заменой векторов $x_i,\ldots$ на ковекторы $\xi_i,\ldots$ и $P_i \longleftrightarrow Q_i$ в показателях степеней элементарных инвариантов.

Используя введенное в /2/ скалярное произведение для базисных функций

$$\begin{pmatrix} P_iQ_i & P_iQ_i \\ \nu_i & \nu_i' \end{pmatrix} \equiv N^2(P_iQ_i) \left| \begin{matrix} P_iQ_i \\ \nu_i \end{matrix} \right) (\bar{x}_i,\bar{y}_i) \left| \begin{matrix} P_iQ_i \\ \nu_i' \end{matrix} \right) (x_i,y_i) = \delta_{\nu_i\nu_i'}, \quad (2)$$

где $\bar{x}_i \equiv \partial/\partial x_i$, $N^2(P_iQ_i) \equiv (P_i + 1)!/P_i!Q_i!(P_i + Q_i + 1)!$ – нор-

мировочный множитель (необходимый для сохранения в новом скалярном произведении ортонормированности базисных функций $\left|\begin{matrix} P_1Q_1 \\ \nu_1 \end{matrix}\right) \times$
$\times (x_1, y_1))$, запишем следующее соотношение для нахождения $\rho(P_1Q_1; P_2Q_2; U, S, T) \equiv \rho$:

$$1/\rho^2 = \frac{(P_1+1)!(P_2+1)!(Q+1)!}{P_1!P_2!Q_1!Q_2!P!Q!(P_1+Q_1+1)!(P_2+Q_2+1)!(P+Q+1)!} \times$$

$$\times [\bar{x}_1\overline{ab}]^{P_1-U-T} [\bar{x}_2\overline{ab}]^{P_2-U-S} [\bar{x}_1\bar{y}_1\bar{a}]^{Q_1-S} [\bar{x}_2\bar{y}_2\bar{a}]^{Q_2-T} [\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{a}]^U \times$$

$$\times [\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{y}_2]^T [\bar{x}_1\bar{y}_1\bar{x}_2]^S [x_1ab]^{P_1-U-T} [x_2ab]^{P_2-U-S} [x_1y_1a]^{Q_1-S} \times$$

$$\times [x_2y_2a]^{Q_2-T} [x_1x_2a]^U [x_1x_2y_2]^T [x_1y_1x_2]^S. \qquad (3)$$

Однако вычислительную схему (3) для определения $\rho^2$ можно упростить, воспользовавшись эквивалентностью нормировок ПИ (I) и старшего вектора НП $D(P_1 + P_2 - 2U - S - T \quad Q_1 + Q_2 + U - S - T) \equiv$
$\equiv D(PQ)$ /5/; в результате имеем:

$$1/\rho^2 = \frac{(P+1)(Q+1)(P+Q+2)(P_1+1)!(P_2+1)!}{P_1!Q_1!P_2!Q_2!2(P_1+Q_1+1)!(P_2+Q_2+1)!} \times$$

$$\times [\bar{x}_1\tilde{e}_2\tilde{e}_3]^{P_1-U-T} [\bar{x}_2\tilde{e}_2\tilde{e}_3]^{P_2-U-S} [\bar{x}_1\bar{y}_1\tilde{e}_3]^{Q_1-S} [\bar{x}_2\bar{y}_2\tilde{e}_3]^{Q_2-T} \times$$

$$\times [\bar{x}_1\bar{x}_2\tilde{e}_3]^U [\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{y}_2]^T [\bar{x}_1\bar{y}_1\bar{x}_2]^S [x_1e_2e_3]^{P_1-U-T} [x_2e_2e_3]^{P_2-U-S} \times$$

$$\times [x_1y_1e_3]^{Q_1-S} [x_2y_2e_3]^{Q_2-T} [x_1x_2e_3]^U [x_1x_2y_2]^T [x_1y_1x_2]^S, \qquad (4)$$

где $e_i \equiv (e_{ik}) = (\delta_{ik})$, $\tilde{e}_i \equiv (\tilde{e}_{ik}) = (\delta_{ki})$ – единичные орты соответственно в векторном и дуальном ему пространствах. Теперь для вычисления правой части (4) применим формулы (и схемы) предложенного в /I,2/ инвариантно-дифференциального исчисления. В итоге найдем следующее (достаточно простое) выражение для $\rho^2$:

$$1/\rho^2 = \frac{(Q+1)(P+Q+2)(P_2+1)!(P+U+1)!S!T!U!}{2P!P_1^{(U+T)}P_2^{(U+S)}Q_1^{(S)}Q_2^{(T)}(P_1+Q_1+1)!(P_2+Q_2+1)!}\times$$

$$\times\sum_{\alpha,\lambda,\gamma}(-1)^{\alpha+\lambda}\frac{S^{(\lambda)}T^{(\gamma)}(T-\alpha+\lambda)^{(\lambda)}(S+\alpha-\lambda)^{(\gamma)}(P_1+S+\alpha-\gamma-\lambda+1)!}{\alpha!\lambda!\gamma!(\gamma-\alpha+\lambda)!}\times$$

$$\times(P_2-U-S+\gamma-\alpha+\lambda)^{(\gamma+\lambda)}(P_1-U-T+\alpha)^{(\lambda+\gamma)}(P_2+Q_2-S-\alpha+\lambda+1)^{(Q_2-\gamma)}\times$$

$$\times(P_1+Q_1-T+\alpha-\lambda+1)^{(Q_1-S)}(P_2+Q_1+Q_2-S-\alpha+2)^{(S-\lambda)}\times$$

$$\times(P_1+Q_1+Q_2-S-T+2)^{(T-\alpha)}, \qquad (5)$$

которое в частных случаях дает результаты, совпадающие с известными ранее /4,5/. Отметим, что правая часть соотношения (5) пропорциональна обобщенной гипергеометрической функции трех переменных (при равных единице аргументах) /6/ того же класса, что и обычные 9j-символы группы $SU_2$ /7/. Это является еще одним свидетельством отмечавшейся уже важности таких функций в формализме компактных групп /7/. В этой связи приведем также получаемое из (5) при T = 0 выражение для $\rho^{-2}(P_1Q_1;P_2Q_2;U,S,0) \equiv \rho_1^{-2}$ в виде

$$1/\rho_1^2 = \frac{(Q+1)(P+Q+2)U!S!(P_2+Q_1+Q_2-S+2)^{(S)}(P_2+1)^{(S)}}{2P_1^{(U)}P_2^{(U+S)}Q_1^{(S)}P!(P_2+Q_2+1)^{(S)}}\times$$

$$\times{}_4F_3\left(\begin{matrix}-S,\ -P_1+U,\ P_2-U-S+1,\ P_2+Q_2-S+2\\ -P_1-Q_1-1,\ P_2+Q_1+Q_2-2S+3,\ P_2-S+2\end{matrix};1\right), \qquad (6)$$

содержащем обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$ (типа Заальшютца) /6/, пропорциональную 6j-символу группы $SU_2$ /7/.

В целом полученные результаты позволяют преодолеть одну из основных трудностей на пути построения алгебры Вигнера-Рака для группы $SU_3$. Развитый подход допускает также обобщение на другие группы $SU_n$ .

Поступила в редакцию
4 июля 1977 г.

## Литература


1. В. П. Карасев, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 4, 21 (1976).
2. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 1, 23 (1977).
3. Г. Я. Любарский. Теория групп и ее применение в физике. М., ГИТТЛ, 1957 г.
4. G. Ponzano, Nuovo Cimento, 41, 142 (1966).
5. В. П. Карасев, Труды ФИАН, 70, 147 (1973).
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., "Наука", 1973 г.
7. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Труды ФИАН, 87, 67 (1976).