Краткие сообщения по физике № 12 1977

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУПП SU_n ДЛЯ РЕДУКЦИИ $D(\{P_i'\}) \times D(P_1'',0,\ldots,0) \to D(\{P_i\})$

В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 53.01

Получены нормированные производящие инварианты групп SU для редукции $D(\{P_i'\}) \times D(P_1'',0\ldots,0) \to D(\{P_i\})$.

Этот результат является определяющим для построения алгебр Вигнера-Рака групп SU_n.

Важнейшим инструментом исследования симметрий физических объектов являются алгебры Вигнера-Рака (ВР) соответствующих групп, обобщающие теорию угловых моментов (ТУМ) /1,2/. Центральная задача при построении этих алгебр - вычисление базисных величин теории: коэффициентов Клебша-Гордана (ККГ) второго ранга (или коэффициентов Вигнера третьего ранга). Для ее решения может быть использован метод производящих инвариантов (ПИ) /3,4/. В рамках этого метода была развита схема рекуррентного построения ПИ для произвольных величин ТУМ /3/ и найден нормированный ПИ для ККГ второго ранга (наиболее общего вида) группы SU_3 /5/.

Цель настоящей работы - получение нормированного ПИ для ККГ второго ранга групп SU_n, отвечающих редукции произведения неприводимых представлений (НП) $D(\{P_i'\}) \times D(P_1'',0,\ldots,0) \to D(\{P_i\})$. Это весьма важно для конструктивного определения алгебр ВР групп SU_n, поскольку такой ПИ может быть использован в качестве базисной величины при рекуррентном построении (на основе обобщения /3/) ПИ для ККГ более общего вида, а в конечном итоге - произвольных величин этих алгебр.

Выражение для искомого ПИ $\mathcal{F}^{\{U_i\}}_{\{P_i'\};\, P_1''}(\{x_i\};\, y_1;\, \{a_i\})$ с точностью до нормировки $\rho(\{P_i'\};\, P_1'';\, \{U_i\})$ легко вычислвается, исходя из общих законов разложения произведений НП групп SU_n /6,7/:

$$\mathcal{Y}^{\{U_i\}}_{\{P'_i\};\,P''_1}(\{x_i\};\,y_1;\{a_i\}) = \rho(\{P'_i\};\,P''_1;\{U_i\})\times$$

$$\times\left[y_1\, a_1\ldots a_{n-1}\right]^{P''_1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}U_i}\prod_{i=1}^{n-1}\left[x_1\ldots x_i\, a_1\ldots a_{n-i}\right]^{P'_i-U_i}\times$$

$$\times\left[y_1\, x_1\ldots x_i\, a_1\ldots a_{n-1-i}\right]^{U_i}\equiv\sum_{\{\nu_i\}}\begin{pmatrix}\{P_i\}\\ \nu_1\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}P''_1 0\ldots 0\\ \nu_2\end{matrix}\right|\begin{pmatrix}\{\bar{P}_i\}\\ \nu_3\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}\{P'_i\}\\ \nu_1\end{matrix}\right)_{(\{x_i\})}\times$$

$$\times\left|\begin{matrix}P''_1 0\ldots 0\\ \nu_2\end{matrix}\right)_{(y_1)}\left|\begin{matrix}\{\bar{P}_i\}\\ \nu_3\end{matrix}\right)_{(\{a_i\})},\qquad\text{(I)}$$

$$P_1 = P'_1 + P''_1 - U_1,\; P_i = P'_i + U_{i-1} - U_i \quad (i>1),\quad \bar{P}_i = P_{n-i},$$

$$x_i \equiv (x_{ik}),\ldots,$$

$$\left[y_1\, a_1\ldots a_{n-1}\right]\equiv\sum_{\{i_\alpha\}}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\, y_{1\,i_1} a_{1\,i_2}\ldots a_{n-1\,i_n},\ldots\;.$$

Здесь $\left(\begin{matrix}\{P'_i\}\\ \ldots\end{matrix}\right|\begin{matrix}P''_1 0\ldots 0\\ \ldots\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{\bar{P}_i\}\\ \ldots\end{matrix}\right)$ – соответствующий коэффициент Вигнера третьего ранга, $\left|\begin{matrix}\{P'_i\}\\ \nu_1\end{matrix}\right)_{(\{x_i\})}$, $\left|\begin{matrix}P''_1 0\ldots 0\\ \nu_2\end{matrix}\right)_{(y_1)}$, $\left|\begin{matrix}\{\bar{P}_i\}\\ \nu_3\end{matrix}\right)_{(\{a_i\})}$ – реализованные в функции от векторов x_i, y_1, a_i $(i = 1,\ldots,n-1)$ компоненты ортонормированных базисов НП $D(\{P'_i\})$, $D(P''_1,0,\ldots,0)$, $D(\{P_i\})$ соответственно. Обобщая процедуру (4) работы /5/, для абсолютной величины $\rho \equiv \rho(\{P'_i\};\,P''_1;\{U_i\})$ получаем следующее выражение:

$$\rho^{-2} = \dim(\{P_i\}) N^2(\{P_i'\}) N^2(P_1'',0,\ldots,0) A\left(\{P_i'\};\{U_i\};P_1''-\sum_{i=1}^{n-1} U_i\right), \quad (2)$$

где: $\dim(\{P_i\})$ – размерность НП $D(\{\bar{P}_i\})$, задаваемая формулой Вейля /6/:

$$\dim(\{P_i\}) = \prod_{m=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{n-m}\left(\sum_{j=1}^{k-1} P_{j+m} + k\right) \Big/ \prod_{l=1}^{n-1} l!, \quad (3)$$

а величины $N^2(\ldots)$ и $A(\ldots)$ определяются соотношениями

$$N^{-2}(\{P_i\}) \equiv \prod_{i=1}^{n-1}\left[\bar{x}_1\ldots\bar{x}_i\ \tilde{e}_{i+1}\ldots\tilde{e}_n\right]^{P_i}\prod_{j=1}^{n-1}\left[x_1\ldots x_j\ e_{j+1}\ldots e_n\right]^{P_j} \quad (4)$$

и

$$A\left(\{P_i'\};\{U_i\};P_1''-\sum_{i=1}^{n-1}U_i\right) \equiv \left[\bar{y}_1\ \tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n\right]^{P_1''-\sum_{i=1}^{n-1}U_i}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}\left[\bar{x}_1\ldots\bar{x}_i\ \tilde{e}_{i+1}\ldots\tilde{e}_n\right]^{P_i'-U_i}\left[\bar{y}_1\ \bar{x}_1\ldots\bar{x}_i\ \tilde{e}_{i+2}\ldots\tilde{e}_n\right]^{U_i}\times$$

$$\times\left[y_1\ e_2\ldots e_n\right]^{P_1''-\sum_{i=1}^{n-1}U_i}\prod_{i=1}^{n-1}\left[x_1\ldots x_i\ e_{i+1}\ldots e_n\right]^{P_i'-U_i}\times$$

$$\times\left[y_1\ x_1\ldots x_i\ e_{i+2}\ldots e_n\right]^{U_i}, \quad (5)$$

$$\bar{x}_i \equiv (\bar{x}_{ik}) = (\partial/\partial x_{ik}),\quad e_i \equiv (e_{ik}) = (\delta_{ik}),\quad \tilde{e}_i \equiv (\tilde{e}_{ki}) = (\delta_{ki}).$$

Используя формулы и схемы предложенного в /3,4/ инвариантно-дифференциального исчисления, в частности, непосредственно проверяемое соотношение

$$[x_1\, a_2 \dots a_n]^{A_1} \dots [x_1 \dots x_{n-3}\, t_{n-2}\, t_{n-1}\, t_n]^{A_{n-3}} \times$$

$$\times\, [x_1 \dots x_{n-2}\, z_{n-1}\, z_n]^{A_{n-2}} \times$$

$$\times\, [x_1 \dots x_{n-1}\, v_n]^{A_{n-1}}\, [x_1 \dots x_n]^{A_n} = \left\{ \prod_{k=0}^{n-2} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i + k \right)^{\left(\sum_{j=1}^{n-1-k} A_j \right)} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (a_2 \bar{\bar{x}}_2) \dots (a_n \bar{\bar{x}}_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a_2 \bar{\bar{x}}_n) \dots (a_n \bar{\bar{x}}_n) \end{vmatrix}^{A_1} \dots \begin{vmatrix} (t_{n-2} \bar{\bar{x}}_{n-2}) \dots (t_n \bar{\bar{x}}_{n-2}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (t_n \bar{\bar{x}}_{n-2}) \dots (t_n \bar{\bar{x}}_n) \end{vmatrix}^{A_{n-3}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (z_{n-1} \bar{\bar{x}}_{n-1}) & (z_n \bar{\bar{x}}_{n-1}) \\ (z_{n-1} \bar{\bar{x}}_n) & (z_n \bar{\bar{x}}_n) \end{vmatrix}^{A_{n-2}} (v_n \bar{\bar{x}}_n)^{A_{n-1}}\, [x_1 \dots x_n]^{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \qquad (6)$$

находим окончательно

$$N^{-2}(\{P_i\}) = \prod_{m=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{i=m-k}^{m} P_i + k \right)^{(P_m)}, \qquad (7)$$

$$A\left(\{P_i'\}; \{U_i\};\ P_1'' - \sum_{i=1}^{n-1} U_i \right) = \prod_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=k}^{l} P_i' - U_l + l - k \right)^{(P_l' - U_l)} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{l} P_i' - \sum_{j=1}^{k} P_j' + U_k + l - k \right)^{(U_l)} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i' + P_1'' - \sum_{i=1}^{n-1} U_i + m \right)^{(U_m)}, \qquad (8)$$

$$A^{(B)} \equiv A!/(A - B)!.$$

Итак, формулы (I – 3, 7, 8) дают полное (с точностью до определяемой каким-либо соглашением общей фазы) решение задачи о построении ПИ групп SU_n для редукции $D(\{P_i'\}) \times D(P_1'',0,\ldots,0) \to D(\{P_i\})$. Кроме того, аналогичными формулами (получаемыми заменой $x_i \to \xi_i,\ldots,$ ξ_i – ковекторы) задаются ПИ для редукции $D(\{\bar{P}_i\}) \times D(0,0\ldots0,P_1'') \to D(\{\bar{P}_i\})$. Соответствующие ККГ по этим ПИ находятся с помощью процедуры (4,5) работы /4/. Отметим также, что приведенные выше соотношения могут быть применены и при получении других нормированных ПИ специального вида, полезных для построения алгебр ВР групп SU_n.

Поступила в редакцию
17 октября 1977 г.

Литература

1. А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванагас, Математический аппарат теории момента количества движения, ГИПНЛ Лит. ССР, Вильнюс, 1960 г.
2. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, Квантовая теория углового момента, "Наука", Л., 1975 г.
3. В. П. Карасев, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 4, 21 (1976).
4. В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Шелепин, ТМФ, 34, № 2 (1978).
5. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 42 (1977).
6. Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1974 г.
7. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, Теория унитарной симметрии, "Наука", М., 1970 г.