Краткие сообщения по физике № 1 1976

ТОЧНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИИ ^{3}He С ЭКСТРАОРДИНАРНЫМИ ФАЗАМИ

О. К. Калашников

УДК 532.132

Получена точная и замкнутая система уравнений для функций Грина с учетом аномального спаривания и диполь-дипольного взаимодействия.

Открытые недавно аномалии в поведении термодинамических величин жидкого ^{3}He при сверхнизких температурах /1/ (более подробно см. обзоры /2/) в настоящее время интенсивно обсуждаются в большом числе теоретических работ. Сейчас не вызывает сомнения существование в жидком ^{3}He двух последовательных фазовых переходов и показано, что важную роль здесь играет эффективное парамагнонное взаимодействие. Спариванием атомов ^{3}He в р-состояния удается в настоящее время качественно правильно объяснить свойства А- и В-фаз, а также ряд других качественных эффектов. Однако количественная теория жидкого ^{3}He, корректная при достаточно низких температурах, до сих пор не создана. В этой связи развитие последовательной микроскопической теории ^{3}He сейчас является весьма желательным.

Здесь сделан первый шаг в этом направлении. Принята микроскопическая модель ^{3}He, и для нее получена точная и замкнутая система уравнений для функций Грина. При выводе этой системы уравнений эффективно учтена возможность образования в ^{3}He экстраординарных фаз, что весьма существенно для правильного описания его термодинамических характеристик при сверхнизких температурах.

Ниже будет рассмотрена модель ^{3}He с гамильтонианом следующего вида:

$$H(\tau) = H_o + H_p + H_z + H_d + H_{ext}(\tau);$$

$$H_o = \sum_\alpha \int \psi^+_\alpha(\vec{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right\} \psi_\alpha(\vec{r}) d\vec{r};$$

$$H_p = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\int \psi^+_\alpha(\vec r)\psi^+_\beta(\vec r\,')g(|\vec r-\vec r\,'|)\psi_\beta(\vec r\,')\psi_\alpha(\vec r)d\vec r d\vec r\,';$$

$$H_z = -\frac{\gamma}{2}h\sum_\alpha\int \psi^+_\alpha(\vec r)(\sigma_3)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec r)d\vec r;$$

$$H_d = \frac{1}{2}\gamma^2\int\left[(\delta_{\mu\nu} - 3e_\mu e_\nu)/|\vec r-\vec r\,'|^3\right]S_\mu(\vec r)S_\nu(\vec r\,')d\vec r d\vec r\,';$$

$$H_{ext}(\tau) = -\sum_\alpha\int d\vec r(\bar\eta_\alpha(\vec r;\tau)\psi_\alpha(\vec r) + \psi^+_\alpha(\vec r)\eta_\alpha(\vec r;\tau)) -$$

$$-\sum_\alpha\int drh_\alpha(\vec r;\tau)S_\alpha(\vec r) - \int drI(\vec r;\tau)\rho(\vec r). \qquad (I)$$

Здесь $g(|\vec r-\vec r\,'|)$ – потенциал парного взаимодействия, h – статическое внешнее поле, $S_\mu(\vec r) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\psi^+_\alpha(\vec r)(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec r)$ – оператор спина в представлении вторичного квантования, $\rho(\vec r) = \sum_\alpha\psi^+_\alpha(\vec r)\psi_\alpha(\vec r)$ – оператор плотности числа частиц. Источники внешнего фермионного поля η в последующем будут выключены. На источники внешнего бозонного поля никаких ограничений не накладывается.

Система уравнений для функций Грина здесь будет получена в рамках метода функционального интегрирования /3/. Исходным пунктом является функциональное уравнение для матричного оператора поля $\Psi^a_p(x)$

$$\Big[-(\sigma_3)^{ab}\delta_{pk}\frac{\partial}{\partial\tau} - \delta^{ab}\delta_{pk}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu\right) +$$

$$+\delta^{ab}\delta_{pk}I(\vec x;\tau) + (\sigma_3)^{ab}(\sigma_3)_{pk}\frac{\gamma}{2}h + h_g(\vec x;\tau)(\sigma_3)^{ab}\left(\frac{\sigma_g}{2}\right)_{pk} -$$

$$-\delta^{ab}\delta_{pk}\left(\int d\vec z g(|\vec x - \vec z|)\langle\rho(\vec z;\tau)\rangle\right) -$$

$$-(\sigma_3)^{ab}\gamma^2\int\frac{\delta_{gs} - 3e_g e_s}{|\vec x - \vec z|^3}\langle S_g(\vec z;\tau)\rangle\left(\frac{\sigma_s}{2}\right)_{pk}\Big]\langle\Psi^b_k(\vec x,\tau)\rangle =$$

$$= -\eta^a_p(\vec x;\tau) + \delta^{ab}\delta_{pk}\int dz g(|\vec x - \vec z|)\frac{\delta\langle\Psi^b_k(\vec x;\tau)\rangle}{\delta I(\vec z;\tau)} +$$

$$+(\sigma_3)^{ab}\gamma^2\int\frac{\delta_{gs} - 3e_g e_s}{|\vec x - \vec z|^3}\frac{\delta\langle\Psi^b_k(\vec x;\tau)\rangle}{\delta h_g(\vec z;\tau)}\left(\frac{\sigma_s}{2}\right)_{pk}d\vec z, \qquad (2)$$

которое легко получается после непосредственного осреднения соответствующих уравнений движения. Здесь оператор поля $\psi_p^a(x)$ и соответствующие ему источники внешнего поля определены следующим образом:

$$\psi_p^a = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_p^c \end{pmatrix}; \qquad \eta_p^a = \begin{pmatrix} \eta_p \\ \eta_p^c \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Необходимость введения зарядовосимметричного оператора $\psi_p^c = C_{pk}\psi_k^+$ обусловлена диполь-дипольным взаимодействием. Для нас существенно то, что по отношению к матрицам σ здесь имеет место следующее свойство:

$$C\sigma_p^T C^{-1} = -\sigma_p, \tag{4}$$

благодаря которому в рамках уравнения (2) диполь-дипольное взаимодействие не вносит никаких добавочных усложнений. Остальные свойства матрицы C - обычные.

Одночастичная функция Грина определяется в терминах ψ-операторов

$$G_{pk}^{ab}(x;y) = -\frac{\delta\langle\psi_p^a(x)\rangle}{\delta\eta_k^b(y)} \tag{5}$$

и является матрицей, объединяющей в единый конгломерат нормальную и аномальную функции Грина.

В общем случае это четырехрядная матрица, и только в отдельных частных случаях здесь возможны упрощения матричной структуры. Уравнение, определяющее G^{-1}-функцию, легко получить, следуя определению G-функции и используя явный вид уравнения (2)

$$[G^{-1}]_{pk}^{ab}(x;y) = \delta(x-y)\Big[-(\sigma_3)^{ab}\delta_{pk}\frac{\partial}{\partial\tau} - \delta^{ab}\delta_{pk}\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu\Big) +$$

$$+ (\sigma_3)^{ab}(\sigma_3)_{pk}\frac{\gamma}{2}h\Big] - \Big(\Gamma_{(o)pk}^{ab}\Big)_\sigma(x;y|z)\langle\Phi_\sigma(z)\rangle - \Sigma_{pk}^{ab}(x,y). \tag{6}$$

Здесь $\langle\Phi_\sigma(z)\rangle$ - эффективное среднее поле

$$\langle \Phi_\sigma(x)\rangle = -J_\sigma(x) + D^{(o)}_{\sigma\eta}(x;z_1)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left(\Gamma^{ab}_{(o)pk}\right)_\eta(z_2;y_2|z_1)G^{ba}_{kp}(y_2;z_2)\right], \qquad (7)$$

$\Sigma^{ab}_{pk}(x;y)$ – массовый оператор, допускающий простое интегральное представление

$$\Sigma^{ab}_{pk}(x;y) = -\left[\Gamma^{ad}_{(o)pq}\right]_\mu(x;z_1|y_1)G^{df}_{qt}(z_1;z_2)\left[\Gamma^{fb}_{tk}\right]_\sigma(z_2;y|y_2)D_{\sigma\mu}(y_2;y_1) \qquad (8)$$

D-функция и Г-функция определены обычным образом

$$\left[DD^{-1}_{(o)}\right]_{\mu\eta}(x;y) = -\delta\langle\Phi_\mu(x)\rangle/\delta J_\eta(y);$$

$$\left[\Gamma^{ab}_{pk}\right]_\sigma(x;y|z) = -\delta\left[G^{-1}\right]^{ab}_{pk}(x;y)/\delta\langle\Phi_\sigma(z)\rangle. \qquad (9)$$

Греческие индексы принимают четыре значения (0; I; 2; 3), латинские – три (I;2;3;). Внешнее поле J_σ объединяет ранее введенные поля бозевского типа ($J_{\sigma=0}$ = I; $J_{\sigma=1,2,3} = h_p$). Нулевая D-функция и затравочная вершинная функция имеют достаточно простой вид

$$D^{(o)}_{\sigma\eta}(x;y) = \delta(x_4 - y_4)\begin{cases} g(|\vec{x}-\vec{y}|)\Big|_{\sigma=\eta=0} \\ \gamma^2\,\dfrac{\delta_{pk} - 3e_p e_k}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\Bigg|_{\sigma;\eta=1,2,3}\end{cases}$$

$$\left[\Gamma^{ab}_{(o)pk}\right]_\mu(x;y|z) = \delta(x-z)\delta(x-y)\begin{cases}\delta^{ab}\delta_{pk}\Big|_{\mu=0} \\ (\sigma_3)^{ab}\left(\dfrac{\sigma_\mu}{2}\right)_{pk}\Bigg|_{\mu=1,2,3}\end{cases} \qquad (I0)$$

Уравнение для D-функции выводится аналогичным образом. В соответствии с ее определением варьируется уравнение для среднего поля $\langle\Phi_\sigma(x)\rangle$ и выполняется ряд простых алгебраических преобразований. Окончательный результат представляется следующим выражением:

$$D_{\sigma\delta}(x;y) = D^{(o)}_{\sigma\delta}(x;y) + D^{(o)}_{\sigma\eta}(x;z_1)\Pi_{\eta\mu}(z_1;y_1)D_{\mu\delta}(y_1;y), \quad (11)$$

где оператор $\Pi_{\eta\mu}(x;y)$ имеет обычное интегральное представление

$$\Pi_{\eta\mu}(x;y) = \frac{1}{2}(\Gamma^{ab}_{(o)pk})_\eta(z_1;y_1|x)G^{bd}_{kq}(y_1;y_2)\times$$

$$\times(\Gamma^{df}_{qt})_\mu(y_2;z_2|y)G^{fa}_{tp}(z_2;z_1). \quad (12)$$

Полученная система уравнений для G- и D-функций совместно с уравнением для Γ-функции

$$\left[\Gamma^{ab}_{pk}\right]_\mu(x;y|z) = \left[\Gamma^{ab}_{(o)pk}\right]_\mu(x;y|z) + \delta\Sigma^{ab}_{pk}(x;y)/\delta\langle\Phi_\mu(z)\rangle \quad (13)$$

представляет собой замкнутую и точную систему уравнений /4/, позволяющую определить все необходимые характеристики рассматриваемой системы ферми-частиц по известным формулам. Эта система уравнений может оказаться полезной при изучении свойств экстраординарных фаз ^3He, так как с самого начала здесь эффективно учтено диполь-дипольное взаимодействие, а также предусмотрена возможность аномального спаривания. В более простом варианте, когда диполь-дипольное взаимодействие отсутствует, эта система уравнений становится аналогичной системе уравнений, полученной ранее Е. С. Фрадкиным /5/.

Поступила в редакцию
17 сентября 1975 г.

Литература

1. D. D. Osheroff, R. C. Richardson, D. M. Lee. Phys. Rev. Lett., 28, 885 (1972). D. D. Osheroff, W. I. Gully, R. C. Richardson, D. M. Lee. Phys. Rev. Lett., 29, 920 (1972).
2. J. C. Wheatly. Physica, 69, 218 (1973); Rev. Mod. Phys., 47, 415 (1975).
3. K. Maki, H. Ebisawa. Prog. Theor. Phys., 50, 1452 (1973).
4. Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 125, 66 (1959); Nucl. Phys., 42, 455 (1959); Труды ФИАН, 29, 7 (1965).

5. О. К. Калашников. Тезисы I8 всесоюзного совещания по физике низких температур, Киев, 1974 г.
6. Е. С. Фрадкин. В сборнике "Проблемы теоретической физики", Изд. Наука, Москва, 1969 г.