Краткие сообщения по физике № 3 1976

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ИНВАРИАНТЫ В ТЕОРИИ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 53.01

Найдены производящие инварианты для коэффициентов Клебша-Гордана произвольного ранга, включающих сложение любого числа моментов. Обсуждаются возможности их использования для нахождения нетривиальных правил отбора, условий обращения в нуль матричных элементов.

Производящие инварианты эффективно используются в теории коэффициентов Клебша-Гордана (коэффициентов КГ) различных групп /I,2/. Так, численное значение коэффициента Вигнера определяется из разложения соответствующего инварианта группы вращений

$$[23]^{-j_1+j_2+j_3}\,[13]^{j_1-j_2+j_3}\,[12]^{j_1+j_2-j_3}, \tag{I}$$

где символ $[ik]$ означает детерминант, составленный из компонент спинора (uv)

$$[ik] = \begin{vmatrix} u_i & u_k \\ v_i & v_k \end{vmatrix}. \tag{2}$$

В работе Редже /3/, на основе которой был получен ряд новых нетривиальных результатов в теории угловых моментов, производящий инвариант (I) был представлен в виде детерминанта 3-го ранга в степени J. Коэффициенты КГ определялись его разложением по нормированным базисным векторам

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}^J = \sqrt{(J!)^3(J+1)} \sum_{\substack{\sum_i R_{ik}=J \\ \sum_k R_{ik}=J}} \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| \prod_{i,k=1}^{3} \frac{u_{ik}^{R_{ik}}}{\sqrt{R_{ik}!}}. \tag{3}$$

Инварианты (I) и (3) относятся к одному коэффициенту КГ группы вращений. В то же время в конкретных расчетах теории угловых моментов мы имеем дело с соединениями (суммами произведений) коэффициентов КГ. Хотя вопросы структуры производящих инвариантов для этих соединений и обсуждались в /4/, но построены они не были

В настоящей работе получено общее выражение для производящего инварианта произвольного обобщенного коэффициента КГ. Рассмотрим его на примере производящего инварианта $\mathcal{J}_{j_{12}j_{123}}$ для коэффициента Вигнера пятого ранга

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c]c} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_{12}, j_{123} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & (((12)3)4)5) \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{m_{12}, m'_{12} \\ m_{123}, m'_{123}}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j_{123} \\ m'_{12} & m_3 & m_{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{123} & j_4 & j_5 \\ m'_{123} & m_4 & m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} \\ m_{12} m'_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{123} \\ m_{123} m'_{123} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Он имеет вид

$$\mathcal{J}_{j_{12}j_{123}} = \Delta(j_1 j_2 j_{12}) \Delta(j_{12} j_3 j_{123}) \Delta(j_{123} j_4 j_5) \times$$
$$\times \left[(2j_{12}+1)(2j_{123}+1) \prod_{i=1}^{5} (2j_i)! \right]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{[12]^{J_1-2j_{12}} [54]^{J_3-2j_{123}}}{(J_1-2j_{12})!(J_3-2j_{123})!} \sum_{\{\beta_{lk}\}} \prod_{\substack{l=1,3 \\ k=3,5 \\ l\neq k}} \frac{[lk]^{\beta_{lk}}}{\beta_{lk}}, \tag{5}$$

где

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(-a+b+c)!(a-b+c)!(a+b-c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{1/2}$$

$J_1 = j_1+j_2+j_{12}$, $J_2 = j_{12}+j_3+j_{123}$, $J_3 = j_{123}+j_4+j_5$. Суммирование ведется по β_{lk}, удовлетворяющим следующим условиям:

$$\beta_{13} + \beta_{23} = J_2 - 2j_{123}$$
$$\beta_{34} + \beta_{35} = J_2 - 2j_{12}$$

$$\sum_{l=1}^{3}\beta_{l4} = J_3 - 2j_5 = \beta_{14} + \beta_{24} + \beta_{34}$$

$$\sum_{l=1}^{3}\beta_{l5} = J_3 - 2j_4 = \beta_{15} + \beta_{25} + \beta_{35}$$

$$\sum_{k=3}^{5}\beta_{2k} = J_1 - 2j_1 = \beta_{23} + \beta_{24} + \beta_{25}$$

$$\sum_{k=3}^{5}\beta_{1k} = J_1 + 2j_3 = \beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{15}. \qquad (6)$$

Всего здесь три независимых параметра суммирования. Выражение (5) может быть очевидным образом записано в общем случае для коэффициента Вигнера произвольного n-го ранга.

Таким образом, впервые открывается возможность практического использования метода производящих инвариантов в теории угловых моментов для соединений коэффициентов КГ. На этой основе сложные суммы отношений произведений факториалов, характеризующие соединения коэффициентов КГ, можно свести к простым выражениям для ограниченного числа инвариантов. Этим не только достигается резкое упрощение расчетов, но и открывается возможность, подобно тому как это было сделано на основе формулы Редже (см. /I/), установить ряд новых неизвестных ранее соотношений между различными соединениями коэффициентов КГ.

Выражения типа (5) могут быть записаны в другой форме; рассмотрим ее на примере производящего инварианта для коэффициента КГ четвертого ранга $\left\langle \begin{matrix} j_1 \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_2 \\ m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_3 \\ m_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_4 \\ m_4 \end{matrix} \right] \begin{matrix} j_{12} \\ ((12)3)4) \end{matrix} \Big\rangle$:

$$\gamma_{j_{12}} = \left[\frac{(2j_{12}+1)!\,\prod_{i=1}^{4}(2j_i)!}{(J_1+1)!\,(J_2+1)!}\right]^{1/2} \frac{[12]^{j_1+j_2-j_{12}}\,[34]^{j_4+j_3-j_{12}}}{\left[(J_1-2j_{12})!\,(J_2-2j_{12})!\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \sum_{m_1+m_2=j_3-j_4} \left\langle \begin{matrix} J_1/2-j_2 \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J_1/2-j_1 \\ m_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_{12} \\ -j_4+j_3 \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \frac{[14]^{J_1/2-j_2-m_1}[13]^{J_1/2-j_2+m_1}[24]^{J_1/2-j_1-m_2}[23]^{J_1/2-j_1+m_2}}{\left[(J_1/2-j_2-m_1)!\,(J_1/2-j_2+m_1)!\,(J_1/2-j_1-m_2)!\,(J_1/2-j_1+m_2)!\right]^{1/2}}. \tag{7}$$

В формуле (7) отчетливо видна поистине замечательная структура производящих инвариантов. Детерминанты здесь играют роль векторов канонического базиса и соединяются с помощью коэффициентов КГ, т.е. сочленение базисных векторов не зависит от их природы. Видна повторяемость структур. Это открывает пути для практического обобщения метода на высшие группы.

Но едва ли не самым интересным моментом в применении полученных результатов является использование сизигий, т.е. соотношений между инвариантами, определяемыми их линейной зависимостью. Примером сизигий является соотношение

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = [12][34]-[13][24]+[14][23] = 0. \tag{8}$$

Ясно, что из сизигий с помощью формул (5) могут быть получены определенные соединения коэффициентов КГ, обращающиеся в нуль. Такие соединения представляют большой интерес с физической точки зрения. Джадд (см. /5/) одним из первых обратил внимание на обращение в нуль вычисляемых матричных элементов некоторых операторов без каких-либо видимых причин. Согласно /6/, релятивистские сечения определяются суммами, содержащими трансформационные матрицы, некоторые из которых также зануляются. С обсуждаемыми соединениями, также как и с корнями коэффициентов КГ (ср./7/), могут быть связаны нетривиальные правила отбора для радиационных переходов. В целом вопросы обращения в нуль матричных элементов, определенных сумм трансформационных матриц, нетривиальные правила отбора составляют в настоящее время одну из важнейших проблем теории угловых моментов. Полученный выше результат указывает путь для ее решения.

Поступила в редакцию
24 ноября 1975 г.

Литература

1. Л. А. Шелепин. Труды ФИАН, 70, 3 (1973).
2. В. П. Карасев. Труды ФИАН, 70, 147 (1973).
3. T. Regge. Nuovo Cimento, 10, 544 (1958).
4. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин. Ядерная физика, 8, 615 (1968).
5. Б. Джадд, Б. Вайборн. Теория сложных атомных спектров, "Мир", М., 1973 г.
6. И. М. Лизин, Л. А. Шелепин. Ядерная физика, 9, 440 (1969).
7. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. Квантовая теория углового момента. "Наука", Л., 1975 г.