Краткие сообщения по физике № 4 1976

МЕТОД ВЕКТОРНЫХ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

В. П. Карасев

УДК 53.01

Предложена общая методика построения производящих инвариантов для коэффициентов Клебша-Гордана произвольного ранга и трансформационных матриц. Обсуждаются возможности обобщения полученных результатов и их применения при анализе физических симметрий.

Одним из основных при исследованиии физических симметрий является метод векторных инвариантов /1.2/. Он основывается на применении инвариантных функций $\mathcal{J}(x^1,x^2,\ldots)$ векторов (спиноров) x^1, $x^2,\ldots$ фундаментальных неприводимых представлений (НП) групп $G_Ф$ физических симметрий /3/. Такие инварианты возникают естественным образом при использовании спинорной модели /4/ (или ее обобщений /1,2/) для базисов $\left\|\begin{matrix}p\\ \nu\end{matrix}\right\|$ НП групп $G_Ф$. Важное значение в формализме групп $G_Ф$ имеют специальные ортонормальные системы $\{\mathcal{J}^A_\alpha(\ldots$ векторных инвариантов, которые являются производящими для базисных величин алгебр Рака-Вигнера этих групп - коэффициентов Клебша-Гордана (коэффициентов КГ) n-го ранга /1,2/. Хотя общая форма производящих инвариантов $\mathcal{J}^A_\alpha(\ldots)$ легко определяется (с точностью до "сизигий") из общей теории инвариантов /3/, получение их точного вида оказалось нетривиальной задачей уже в случае одной из распространенных в физике групп $G_Ф$-группы SU_2, лежащей в основе теории угловых моментов (ТУМ). До недавнего времени единственный пример таких систем инвариантов в ТУМ представляли известные еще с 30-х годов /5/ производящие инварианты $\mathcal{J}_{j_{12}}(x^1,x^2,x)$ для обычных (2-го ранга) коэффициентов КГ $\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & j_{12}\\ m_1 & m_2 & m_{12}\end{pmatrix}$:

$$\gamma_{j_{12}}(x^1,x^2,x) \equiv \left[(2j_1)!(2j_2)!(2j_{12})!\right]^{1/2}\Delta(j_1j_2j_{12})\times$$

$$\times\frac{[20]^{J_1-2j_1}[10]^{J_1-2j_2}[12]^{J_1-2j_{12}}}{(J_1-2j_1)!(J_1-2j_2)!(J_1-2j_{12})!} = \sum_{m_1+m_2-m_{12}=0}(-1)^{j_{12}-m_{12}}\times$$

$$\times[2j_{12}+1]^{-1/2}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12}\end{pmatrix}\left|\begin{matrix} j_1 \\ m_1\end{matrix}\right)(1)\left|\begin{matrix} j_2 \\ m_2\end{matrix}\right)(2)\left|\begin{matrix} j_{12} \\ -m_{12}\end{matrix}\right)(0), \qquad (I)$$

где

$$J_1 = j_1 + j_2 + j_{12},$$

$$\Delta(abc) = [(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!/(a+b+c+1)!]^{1/2},$$

$$[kl] \equiv \begin{vmatrix} x_1^k & x_1^l \\ x_2^k & x_2^l \end{vmatrix} = x_1^k x_2^l - x_2^k x_1^l, \quad x^i \equiv (x_1^i, x_2^i) \text{- спиноры } SU_2,\ x^0 = x,$$

$$\left|\begin{matrix} j_i \\ m_i\end{matrix}\right)(i) = \left[\frac{(2j_i)!}{\prod_{\pm}(j_i \pm m_i)!}\right]^{1/2}(x_1^i)^{j_i+m_i}(x_2^i)^{j_i-m_i}, \quad i = 0,1,2,$$

$$j_0 = j_{12},\ m_0 = m_{12},\ \prod_{\pm}(a\pm b)! = (a+b)!(a-b)!$$

Однако в последнее время в решении проблемы построения производящих инвариантов для группы SU_2 наметился заметный прогресс. Так, в работе /6/ были найдены (полуэвристическим способом) производящие инварианты для коэффициентов КГ 3-го и 4-го рангов (или коэффициентов Вигнера 4-го и 5-го рангов соответственно) и высказана гипотеза о возможности распространения этих результатов на общий случай. В настоящей работе дано полное и строгое решение указанной проблемы, базирующееся на методике построения производящих инвариантов для коэффициентов КГ произвольного ранга.

Методика состоит из двух этапов. Содержание первого этапа определяется следующими утверждениями.

Утверждение I. Пусть $\gamma_\alpha^A\left(\{x^l\}_{l=1\dots n};x\right)$ - производящий инвариант для коэффициентов КГ n-го ранга при схеме связи А (α - набор промежуточных моментов, j_A - результирующий момент для этой схемы связи):

$$\gamma^A_\alpha\left(\{x^1\};x\right) \equiv \sum_{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - m_A = 0} \begin{pmatrix} j_1 \\ m_1 \end{pmatrix}\!\!\begin{vmatrix} j_2 \\ m_2 \end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix} j_n \\ m_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j_A \\ m_A \end{vmatrix}\begin{matrix} A \\ \alpha \end{matrix}\Bigg) \prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} j_i \\ m_i \end{pmatrix}(i)(-1)^{j_A - m_A}\times$$

$$\times\left[2j_A + 1\right]^{-1/2}\begin{vmatrix} j_A \\ -m_A \end{pmatrix}(0); \qquad (2)$$

тогда, применяя к $\gamma^A_\alpha(\ldots)$ ковариантный оператор

$$(-1)^{j_A - m_A}\left[(2j_A + 1)/(2j_A)!\prod_{\pm}(j_A \pm m_A)!\right]^{1/2}(Dx_1)^{j_A - m_A}(Dx_2)^{j_A + m_A},$$

$$Dx_k \equiv \partial/\partial x_k, \qquad (3)$$

получим тождество

$$\begin{vmatrix} j_A \\ m_A \end{pmatrix}(12\ldots n) \equiv (-1)^{j_A - m_A}\left[(2j_A + 1)/(2j_A)!\prod_{\pm}(j_A \pm m_A)!\right]^{1/2}\times$$

$$\times(Dx_1)^{j_A - m_A}(Dx_2)^{j_A + m_A}\gamma^A_\alpha\left(\{x^1\};x\right), \qquad (4)$$

где

$$\begin{vmatrix} j_A \\ m_A \end{pmatrix}(12\ldots n) \equiv \sum_{\sum\limits_i m_i = m_A} \begin{pmatrix} j_1 \\ m_1 \end{pmatrix}\!\!\begin{vmatrix} j_2 \\ m_2 \end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix} j_n \\ m_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j_A \\ m_A \end{vmatrix}\begin{matrix} A \\ \alpha \end{matrix}\Bigg|\prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} j_i \\ m_i \end{pmatrix}(i) \qquad (5)$$

базисный вектор НП $D^{j_A} \subset D^{j_1} \times D^{j_2} \times \ldots \times D^{j_n}$. Назовем правую часть (4) инвариантно-операторной формой для $\begin{vmatrix} j_A \\ m_A \end{pmatrix}(12\ldots n)$.

<u>Утверждение 2.</u> Пусть $\begin{vmatrix} j_{A_1} \\ m_{A_1} \end{pmatrix}(1\ldots n_1)$, $\begin{vmatrix} j_{A_2} \\ m_{A_2} \end{pmatrix}(n_1+1\ldots n_1+n_2),\ldots$ $\begin{vmatrix} j_{A_k} \\ m_{A_k} \end{pmatrix}\left(n_1+\ldots+n_{k-1}+1\ldots\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\right)$ – базисные векторы НП $D^{j_{A_1}}$, $D^{j_{A_2}},\ldots$ $D^{j_{A_k}}$ в инвариантно-операторной форме, тогда имеет место равенство

$$\sum_{\{m_{A_1}\}} \begin{pmatrix} j_{A_1} & j_{A_2} & \ldots & j_{A_k} & B \\ m_{A_1} & m_{A_2} & \ldots & m_{A_k} & \beta \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{k} \left| \begin{matrix} j_{A_i} \\ m_{A_i} \end{matrix} \right) = \gamma_\beta^B \left(\{\bar{y}^i\}\, i=1\ldots k \right) \prod_{i=1}^{k} \gamma_{\alpha_i}^{A_i}(\ldots; y^i), \tag{6}$$

где $\begin{pmatrix} j_{A_1} & j_{A_2} & \ldots & j_{A_k} & B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \beta \end{pmatrix}$ – коэффициент Вигнера К-го ранга при схеме связи В; инвариант $\gamma_\beta^B(\{\bar{y}^i\})$ получается из $\gamma_\beta^B(\{y^i\})$ заменой спиноров $y^i \equiv (y_1^i, y_2^i)$ на эквивалентные им по трансформационным свойствам операторы $\bar{y}^i \equiv (-Dy_2^i, Dy_1^i)$. Назовем правую часть (6) символической формой для производящего инварианта $\sum_{l=1}^{k} n_l$-го ранга (ранг инварианта равен рангу соответствующего коэффициента Вигнера). Замечание: соотношение (6) легко обобщается на случай, когда часть базисных векторов $\left| \begin{matrix} j_{A_i} \\ m_{A_i} \end{matrix} \right)$ взята в обычном спинорном представлении (см. (I)).

С помощью этих утверждений первый этап методики формулируется следующим образом:

а) используя производящие инварианты низших рангов, посредством операций типа (4) находим инвариантно-операторное представление для базисных векторов промежуточных НП D^{j_A}; б) с помощью коэффициентов Вигнера низших рангов и соотношений типа (6) получим промежуточные инварианты в символической форме; в) итерируя процессы пунктов а), б), найдем в символической форме производящий инвариант произвольного ранга. Заметим, что рекуррентный характер этого этапа требует знания в качестве начальных производящих инвариантов только низших рангов (в конечном итоге инвариантов типа (I)).

Второй этап методики – переход от символической формы производящих инвариантов к обычной (в виде полиномов $\sum_{\{\lambda_{ik}\}} c(\{\lambda_{ik}\}) \times \prod_{ik} [ik]^{\lambda_{ik}}$), не содержащей промежуточных спиноров y^i и $\bar{y}^i$, – основан на свойствах дифференциального оператора $\Omega_2(\bar{y}^i, \bar{y}^l)$ (оператора Кэли 2-го ранга /3/)

$$\Omega_2(\bar{y}^i,\bar{y}^l) \equiv [\bar{y}^i\bar{y}^l] \equiv [\bar{i}\bar{l}]_{(y)} = \begin{vmatrix} Dy_1^i & Dy_1^l \\ Dy_2^i & Dy_2^l \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Эти свойства выражаются следующими операторными соотношениями:

а) $\Omega_2(\bar{y}^i,\bar{y}^l)f_1(y^l)f_2(y^i) = f_1(y^l)\Omega_2 f_2(y^i) + f_2(y^i)\Omega_2 f_1(y^l)$,

б) $\Omega_2(\bar{y}^i,\bar{y}^l)[ik]_{(y)} = -[\bar{l}k]_{(y)} = -\begin{vmatrix} -Dy_2^l & y_1^k \\ Dy_1^l & y_2^k \end{vmatrix}$, $\qquad (8)$

в) $\Omega_2(\bar{y}^i,\bar{y}^l)[ik]_{(y)}[lm]_{(y)} = -[\bar{l}k]_{(y)}[lm]_{(y)} = [km]_{(y)}$.

Поскольку инварианты $\gamma_{\alpha_i}^{A_i}(\ldots)$ являются полиномами $\sum\limits_{\{\lambda_{ik}\}} c(\{\lambda_{ik}\})\times \prod\limits_{ik}[ik]^{\lambda_{ik}}$, то операция перехода от символической формы производящих инвариантов к обычной осуществляется путем выполнения (с помощью (8)) дифференцирований, содержащихся в исходной форме. Результатом этой операции (назовем ее операцией элиминирования промежуточных спиноров) будет представление производящих инвариантов любого ранга в виде полиномов $\sum\limits_{\{\lambda_{ik}\}} c(\{\lambda_{ik}\})\prod\limits_{ik}[ik]^{\lambda_{ik}}$ (с точно определенными коэффициентами $c(\ldots)$).

Продемонстрируем действие приведенной методики на примере получения производящего инварианта 5-го ранга, отвечающего схеме связи ((I2)(34)5). Связывая полученные путем применения операции (4) к инвариантам типа (I) векторы $\left|\begin{matrix} j_{12} \\ m_{12}\end{matrix}\right)(12)$, $\left|\begin{matrix} j_{34} \\ m_{34}\end{matrix}\right)(34)$ и $\left|\begin{matrix} j_5 \\ m_5\end{matrix}\right)(5)$ с помощью коэффициентов Вигнера 3-го ранга, находим символическую форму для производящего инварианта $\gamma_{j_{12}j_{34}}^{((12)(34)5)}(\{x^l; l=1,2,\ldots 5\})$:

$$\gamma_{j_{12}j_{34}}^{((12)(34)5)}(\ldots) \equiv \sum_{\sum_i m_i=0} \left(\begin{matrix} j_1 \\ m_1\end{matrix}\right|\ldots\left|\begin{matrix} j_5 \\ m_5\end{matrix}\right]_{j_{12}j_{34}}^{((12)(34)5)}\Bigg)\prod_{i=1}^{5}\left|\begin{matrix} j_i \\ m_i\end{matrix}\right)(i) \doteq$$

$$= \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)\prod_{i=1}^{5}(2j_i)!\right]^{1/2}\Delta(j_1j_2j_{12})\Delta(j_3j_4j_{34})\Delta(j_{12}j_{34}j_5)\times$$

$$\times\frac{[12]^{J_1-2j_{12}}[34]^{J_2-2j_{34}}[5\bar{0}']^{J_3-2j_{12}}[5\bar{0}]^{J_3-2j_{34}}}{(J_1-2j_{12})!(J_2-2j_{34})!(J_3-2j_{12})!(J_3-2j_{34})!}\times$$

$$\times\frac{[\overline{00}']^{J_3-2j_5}[20]^{J_1-2j_1}[10]^{J_1-2j_2}[40']^{J_2-2j_3}[30']^{J_2-2j_4}}{(J_3-2j_5)!(J_1-2j_1)!(J_1-2j_2)!(J_2-2j_3)!(J_2-2j_4)!},$$

$$J_2 = j_3 + j_4 + j_{34},\quad J_3 = j_{12} + j_{34} + j_5, \tag{9}$$

откуда путем выполнения дифференцирования получим полиноминальную форму инварианта, аналогичную формуле (5) работы /6/.

Полученная методика позволяет расширить сферу действия метода векторных инвариантов в ТУМ. В частности, с помощью производящих инвариантов для коэффициентов КГ произвольного ранга можно получить производящие инварианты и для трансформационных матриц. Для этого используется тот факт, что трансформационные матрицы являются коэффициентами $C^{B,A}_{\beta,\alpha}$ разложения одной ортонормальной системы инвариантов $\{\gamma^A_\alpha(\ldots)\}$ по другой $\{\gamma^B_\beta(\ldots)\}$ /I,2/. Осуществляя замену $y^i \to \bar{y}^i$ в одной из этих систем и применяя ее к другой, получим (после умножения на $\left[\prod_{i=1}^{n}(2j_i)!\right]^{-1}$) инвариантное выражение для соответствующей трансформационной матрицы, которое в компактной форме задает вычислительную схему для нее.

Таким образом, настоящая работа в идейном плане завершает решение проблемы построения производящих инвариантов для базисных величин ТУМ в ее классическом варианте /7/ и приводит к эффективному использованию в ней метода векторных инвариантов. Кроме того, полученную методику (и лежащие в ее основе идеи) можно распространить как на неклассические разделы ТУМ /I/, так и на другие группы G_Φ (SU_n, SO_n, Sp_{2n}, $n>2$). Из физических аспектов работы отметим также возможность проведения более глубокого анализа физических симметрий в многочастичных моделях (ср. с /I,2/).

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. А. Шелепину и М. М. Сущинскому за внимание к работе.

Поступила в редакцию
8 декабря 1975 г.

Литература

1. Л. А. Шелепин. Труды ФИАН, **70**, 3 (1973).
2. В. П. Карасев. Труды ФИАН, **70**, 147 (1973).
3. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления ИЛ, М., 1947 г.
4. Г. Я. Любарский. Теория групп и ее применение в физике. ГИТТЛ, М., 1957 г.
5. Б. Л. Ван-дер-Верден. Метод теории групп в квантовой механике. ДНТВУ, Харьков, 1938 г.
6. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 32 (1976).
7. А. П. Юцис, А. А. Бандзайтис. Теория момента количества движения в квантовой механике. "Минтис", Вильнюс, 1965 г.