Краткие сообщения по физике № 5 1976

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Г. Гамалий

УДК 533.6.011

Проводится решение задачи об устойчивости поверхности сферического кавитационного пузырька, заполненного газом, который сжимается под действием давления в бесконечной несжимаемой жидкости. Движение границы становится экспоненциально неустойчивым, когда сжатый газ начинает тормозить поверхность пузырька. Этот эффект может привести к ограничению величины давления при сжатии.

1. В работе /1/ было показано, что граница расширяющегося под действием внутреннего давления кавитационного пузырька может быть неустойчивой, если плотность вещества внутри пузырька меньше плотности окружающей его жидкости.

Аналогичное явление может иметь место и при захлопывании пузырька под действием давления жидкости, в которую он погружен. Решение задачи о захлопывании пустой сферической полости в несжимаемой жидкости принадлежит Рэлею /2/. Закон движения границы сферы радиуса R в этом случае есть

$$v = E_o^{1/2}(2\pi\rho)^{-1/2}R^{-3/2}. \qquad (1)$$

Здесь E_o, ρ – полная энергия и плотность жидкости. Энергия конечна, так как давление на больших расстояниях падает до нуля. Исследование этой задачи с учетом вязкости проведено Е. И. Забабахиным /3/. Им же указано, что закон движения границы пузырька, заполненного невесомым (кинетическая энергия газа много меньше тепловой) идеальным газом, может быть получен из закона сохранения энергии аналогично задаче Рэлея:

$$v^2 = E_o(2\pi\rho)^{-1}(R^2 - R_2^2)R^{-5}. \qquad (2)$$

Движение жидкости в этом случае может продолжаться лишь до R_2, когда сопротивление газа прекращает дальнейшее сокращение полости. В этот момент вся кинетическая энергия жидкости переходит во внутреннюю энергию газа. При $R \gg R_2$ (2) совпадает с (I). В этом случае движение границы ускоренное. При $R \leqslant (5/3)^{1/2} R_2$ граница пузырька начинает замедляться.

Ниже мы рассмотрим задачу об устойчивости этого течения.

2. Гидродинамические уравнения для несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\vec{V}^2 = -\rho^{-1}\mathrm{grad}P; \; \vec{V} = \mathrm{grad}\Psi; \; \Delta\Psi = 0. \qquad (3)$$

Здесь $\vec{V}$ – скорость, Ψ – потенциал скорости, P – давление, ρ – – плотность.

Пусть все величины испытывают малые возмущения на границе сферической полости

$$r = R + \Delta; \; \vec{V} = \vec{V}_0 + v; \; P = P_0 + p; \quad \Delta \ll R; \; v \ll V_0; \; p \ll P_0, \qquad (4)$$

$$\Delta = \sum_{mn} \Delta_{mn}(r,t) Y_{mn}(\Theta,\varphi). \qquad (5)$$

Подставив (4) в (3) и линеаризуя, получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\vec{V}_0\vec{v} = -\rho^{-1}\mathrm{grad}p \qquad (6)$$

Проинтегрируем r-ую компоненту (6) по r в пределах от $R+\Delta$ до ∞, полагая, что при $r = \infty$ возмущенная и невозмущенная скорость равны нулю. Тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_{0r}v_r + p\rho^{-1} = 0. \qquad (7)$$

Здесь ψ – потенциал возмущения скорости. Все величины в (7) являются функциями R – невозмущенного радиуса полости.

Сформулируем условия на границе полости. Предположим, что давление в объеме с возмущенными границами и в первоначальной полости одинаково. Отсюда

$$p(R) = -\left.\frac{\partial P_0}{\partial r}\right|_R \Delta(R). \qquad (8)$$

Разлагая в ряд скорость на возмущенной границе $V(R + \Delta)$ по величине Δ/R и учитывая (4), имеем

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left.\frac{\partial V_{or}}{\partial r}\right|_R \Delta(R) + \dot{v}_r(R). \tag{9}$$

Для потенциала возмущения скорости выбираем решение уравнения Лапласа, исчезающее на бесконечности

$$\psi = \sum_{mn} \frac{f(t)}{r^{n+1}} Y_{mn}(\theta, \varphi). \tag{10}$$

Используя (5),(7),(10), легко получить уравнение для определения амплитуды возмущения радиуса на границе полости

$$\frac{d^2\Delta_n}{(d\ln R)^2} + \left(2 + \frac{d\ln V_{or}}{d\ln R}\right)\frac{d\Delta_n}{d\ln R} - (n-1)\frac{d\ln V_{or}}{d\ln R}\Delta_n = 0. \tag{11}$$

Здесь $dt = R\ln R/V_{or}$. При $R = R_o$ задаются значения амплитуды и скорости возмущения для данного номера гармоники n. Закон невозмущенного движения $V_{or}(R)$ предполагается известным. Уравнение (11) является уравнением в обыкновенных производных и легко может быть проинтегрировано численно и тем самым получено полное решение поставленной задачи. В отдельных случаях возможны аналитические решения. Приведем некоторые из них.

3. При $n = 1$ имеем

$$\Delta_1 = C_1 \int_{R_o}^{R} dR (V_{or})^{-1} R^{-3} + C_2. \tag{12}$$

Заменив переменные $dt = (V_{or})^{-1} dR$, получим

$$\Delta_1 = C_1 R_0^{-3} \int_0^t R_0^3 R^{-3} dt + C_2, \tag{12}$$

откуда следует, что амплитуда возмущения первой гармоники растет тем сильнее, чем больше степень сжатия $R_0^3 R^{-3}$.

4. Если $V_{or} \sim R^m$, то из (11) легко получить, что $\Delta_n \sim R^k$, где

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2}(2+m) \pm \sqrt{\left(\frac{2+m}{2}\right)^2 + m(n-1)}. \qquad (13)$$

Частным случаем такой задачи является задача Рэлея, когда $m = -3/2$. При $n = 1$ имеем $k_1 = 0, k_2 = -1/2$ в согласии с общим решением (12). При $n \geqslant 2$

$$\Delta_n^{(1,2)} = R^{-1/4}\exp(\mp A\ln R), \qquad (14)$$

где $A = [3(n-1)/2 - 1/16]$, решение приобретает колебательный характер, причем частота растет пропорционально $\sim\sqrt{n}$.

5. Получим решение уравнения (11) для случая $n \gg 1$ в виде, обобщающем (14)

$$\Delta_{n\gg1} = \exp\left\{\int (f_1 + i\sqrt{n}f_2)\, d\ln R\right\}. \qquad (15)$$

Подставив (15) в (11) и сохраняя члены пропорциональные n, имеем

$$\Delta_{n\gg1} = \left(-\frac{d\ln V_0}{d\ln R}\right)^{-1/4} R^{-1}V_0^{-1/2}\exp\left\{\pm i n^{1/2}\int\left(-\frac{d\ln V_0}{d\ln R}\right)^{1/2} d\ln R\right\}. \qquad (16)$$

Легко видеть, что при подстановке в (16) $V_0 \sim R^{-3/2}$ мы получим результат, совпадающий в с (14) при $n \gg 1$.

Если $d\ln V_0/d\ln R < 0$, т.е. движение ускоренное, то возмущения осциллируют с растущей по степенному закону амплитудой. Когда газ начинает тормозить границу полости, $d\ln V_0/d\ln R > 0$ и возмущения, как это следует из (16), растут по экспоненциальному закону. Легко видеть, что это неустойчивость Тэйлора /4/, если привести инкремент возрастания возмущений к другому виду.

$$\gamma t = \int\left(n\frac{d\ln V_0}{d\ln R}\right)^{1/2} d\ln R = \int\left(\frac{n}{R}\frac{dV_0}{dt}\right)^{1/2} dt. \qquad (17)$$

6. Итак, полученные решения показывают, что рост возмущений со временем зависит от знака ускорения. При ускоренном движении возмущения растут по степенному закону (с течением времени или при уменьшении радиуса полости), причем низкие гармоники растут быстрее высоких. Характер зависимости как для пустого пузырька, так и для заполненного газом примерно одинаков

$$\Delta_1 \sim R^{-1/2}, \ \Delta_{n\gg 1} \sim R^{-1/4}.$$

Скорость изменения амплитуды высоких гармоник в этом случае не зависит от n, с n связана лишь частота колебаний.

При замедленном движении характер роста низких гармоник не меняется, амплитуда высоких гармоник начинает экспоненциально нарастать со скоростью, пропорциональной $\sqrt{n}$. Рост очень высоких гармоник подавляется вязкостью согласно /4/.

Отметим, что приведенное решение может быть полезным при анализе устойчивости других задач со сферическим сжатием вещества, например, в проблемах нагревания и сжатия вещества лазерным лучом или электронными пучками.

Поступила в редакцию
26 декабря 1975 г.

Литература

1. A. M. Binnie. Proc. Camb. Phyl. Soc., 49 part 1, 151 (1953).
2. Lord Railegh. Phil. Mag., 34, 200, 94-98 (1917).
3. Е. И. Забаохин в сб. "Механика в СССР за 50 лет", т.2, стр. 313, изд. Наука. М., 1970 г.
4. S. Chandrasekhar. "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability". Clarendon Press, Oxford, 1961.