Краткие сообщения по физике № 5 1976

ПЛАЗМЕННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ С ДВУМЯ ХАРАКТЕРНЫМИ МАСШТАБАМИ ДЛИН ВОЛН

Г. А. Гусев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин

УДК 533.95

Рассмотрен новый вариант эволюции плазменной турбулентности, инициированной параметрической неустойчивостью с одинаковым максимальным инкрементом при двух различных значениях экстремального волнового числа. Насыщение неустойчивости обусловлено вынужденным рассеянием возбуждаемых волн на ионах в приближении интегральной перекачки. Полученные результаты обсуждены применительно к плазме ионосферы Земли.

В экспериментах по внешнему зондированию ионосферы Земли были обнаружены дополнительные резонансы, частоты которых являются комбинациями различных собственных частот магнитоактивной плазмы /I/. Для интерпретации таких явлений целесообразна разработка нелинейной теории параметрического распада волн в ионосфере. В настоящей работе мы изложим результаты теории параметрического распада циркулярно поляризованной электромагнитной волны накачки (с частотой ω_o, вектором напряженности электрического поля $\vec{E}_o$ и волновым вектором $\vec{k}_o$, параллельным магнитному полю $\vec{B}_o$) на две косые ленгмюровские волны $\omega_o = 2\omega_{Le}|\cos\theta|(1 + \Delta)$ $(|\Delta|\ll 1)$ в плазме с замагниченными электронами*) $\omega_{Le}^2 \ll \Omega_e^2$ /2/. Такой распад может реализоваться в условиях полярной ионосферы на высотах выше I000 км и в нижней ионосфере на высотах 95–I05 км. Ниже будем считать, что кулоновская частота электрон-ионных столкновений ν_{ei} существенно превышает затухание Ландау. Это заведомо выполняется в ионосфере Земли вплоть до вы-

---

*) ω_{Le} и Ω_e – ленгмюровская и гироскопическая частоты электронов, θ – угол между волновым вектором $\vec{k}$ возбуждаемых волн и магнитным полем $\vec{B}_o$, $r_{De} = (v_{Te}/\omega_{Le})$ – дебаевский радиус, v_{Te} – тепловая скорость электронов с температурой T_e и плотностью n_e.

сот 3000 км. При малых расстройках резонанса

$$\Delta + \omega_{Le}^2/6\Omega_e^2 < (v_{Te}/c)^{2/3}$$

происходит раскачка колебаний около одного экстремального волнового числа; в случае, когда выполнено неравенство противоположного знака, возбуждаются три спектральные линии/2/. Ниже рассмотрен промежуточный случай расстройки резонанса

$$2\Delta = \omega_{Le}^2 \sin^2\theta/\Omega_e^2 + (3v_{Te}/c)^{2/3},$$

когда две из трех линий сливаются в одну и происходит раскачка с одинаковым инкрементом

$$\gamma(k,\theta) = (\nu_{ei}/2)\left\{-1 + \left[\frac{27}{4} p^2 \sin^2\theta\cos^4\theta - 2n\rho^2\left(z - \frac{2\sqrt{2}}{3n}\right)^{2n}\right]^{1/2}\right\};$$

$$\frac{\pi}{2} n > \theta > \frac{\pi}{2}(n-1); \; n = 1,2 \qquad (I)$$

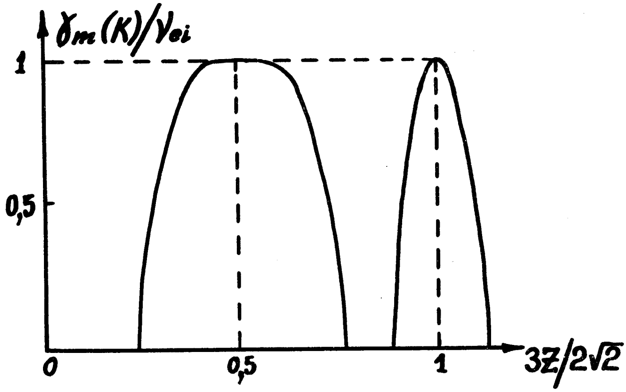
колебаний с частотами $\sim\omega_{Le}|\cos\theta|$ и двумя характерными волновыми числами k_1 и k_2 /2/. Здесь z - безразмерное волновое число, p - определяется отношением поля накачки E_o к минимальному пороговому E_{min}, а величина ρ^2 характеризует резкость зависимости инкремента от волнового числа:

$$z = \sqrt{2} k r_{De}(c/3v_{Te})^{1/3}; \; p^2 = (E_o/E_{min})^2; \; \rho^2 = \frac{81}{32}\sqrt[3]{3}\,\frac{\omega_{Le}^2}{\nu_{ei}^2}\left(\frac{v_{Te}}{c}\right)^4;$$

$$E_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} B_o \frac{\nu_{ei}}{\omega_{Le}}$$

Инкремент (I) как функция углов θ достигает максимума при $\theta = \theta_m \equiv \arcsin(1/\sqrt{3})$ и при $\theta = \pi - \theta_m$. Зависимость экстремального по углам инкремента $\gamma_m(k)$ от волнового числа k представлена на рис.I.

Если поле E_o волны накачки немного превышает порог E_{min} $p - 1 < 1$, то область отличного от нуля инкремента представляет собой две изолированные подобласти в пространстве переменных θ и k. В таких условиях обусловленная вынужденным рассеянием на ионах нелинейная стадия развития неустойчивости (I) во времени t описывается системой двух уравнений для спектральной плотности энергии шума $W(k,\theta,t) = (1 + p^2)\varkappa T_e y_{1,2}(x,z,\tau)$ вблизи каждого из экстремальных волновых чисел $z_1 = 2z_2 = 2\sqrt{2}/3$:



Р и с. I. Зависимость экстремального по углам инкремента от волнового числа $kr_{De} = (z/\sqrt{2})(3v_{Te}/c)^{1/3}$. Меньшее из волновых чисел $z = 2/3$ реализуется во второй четверти углов $\pi/2<\theta<\pi$. График построен для значений $p = 2$, $\rho^2 = 100$

$$y_1(x,z,\tau) = \left[\frac{\partial \ln y_1}{\partial \tau} + u_1^{-2}(x,\tau) + 2\rho^2\left(z - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2\right]^{-1};$$
$$y_2(x,z,\tau) = \left[\frac{\partial \ln y_2}{\partial \tau} + u_2^{-4/3}(x,\tau) + \rho^2\left(z - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4\right]^{-1}; \qquad (2)$$

$$u_1(x,\tau) = \frac{\rho}{\pi}\int_{z_1}^{z_2} dz y_1(x,z,\tau);\quad u_2(x,\tau) = \frac{2^{3/4}\sqrt{\rho}}{\pi}\int_{z_1}^{z_2} dz y_2(x,z,\tau);$$

$$x = \begin{cases} \theta - \theta_m & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta_m - \theta & \pi/2<\theta<\pi \end{cases};\ \tau = 3p\nu_{ei}t. \qquad (3)$$

В условиях $\rho^2 \gg (p - 1)/3p$ инкремент неустойчивости (I) имеет более резкую зависимость от волнового числа z, чем от угла x, что позволяет для функции $u_{1,2}(x,\tau)$ получить одномерные интегро-дифференциальные уравнения:

$$\partial u_1/\partial\tau - 1/u_1 = u_1\left(a^2-x^2-\varepsilon_1\int\limits_{x_1}^{x_2} dx'(x'-x+R)u_2(x',\tau)\right);$$

$$\partial u_2/\partial\tau - 1/u_2^{1/3} = u_2\left(a^2-x^2-\varepsilon_2\int\limits_{x_1}^{x_2} dx'(x'-x-R)u_1(x',\tau)\right); \quad (4)$$

$$a^2 \equiv (p-1)/3p; \; R = (3v_{Te}/2\sqrt{2}c)^{2/3}; \; \varepsilon_2 = 2^{11/4}\rho^{-1/2}\varepsilon_1;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(2^{9/4}/3^{15/2})\,\frac{1+p^2}{pn_e r_{De}^3}\left(\frac{r_{De}}{r_{Di}}+\frac{r_{Di}}{r_{De}}\right)^{-2}. \quad (5)$$

Эти уравнения (4) справедливы в приближении интегральной перекачки энергии турбулентности по спектру

$$a^2 < 2\sqrt[3]{9}(v_{Ti}^3/v_{Te}^2c)^{2/3}$$

и для замагниченных биений

$$(a+R)^2 < 3(\Omega_i/\omega_{Le})^2,$$

когда нелинейным взаимодействием внутри спектральных линий можно пренебречь.

Стационарные решения системы (4) имеют вид (ср.с решением в работе /3/):

$$u_1(x,\infty) = \left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^{-1/2}; \; u_2(x,\infty) = \left[(x-a_2)^2 + b_2^2\right]^{-3/4};$$

$$a_1 = \sqrt{a^2+R^2} + R; \; a_2 = \sqrt{a^2+R^2} - R;$$

$$b_1^2 = 4(x_2-a_1)(a_1-x_1)\exp\left(-\frac{2a_2}{\varepsilon_2}\right);$$

$$b_2 = \pi^2\varepsilon_1^2/2a_1^2; \; a_1/\varepsilon_1, \; a_2/\varepsilon_2 \gg 1; \; b_{1,2}^2 \ll 1. \quad (6)$$

Решение (6) отвечает двум асимметричным линиям. Если постоянная переброса R не мала по сравнению с надпороговостью a, то возникает значительное уширение линии турбулентного шума с характерным волновым числом k_1 (в первой четверти $0<\theta<\pi/2$ углов θ). Переброс R снижает полный (проинтегрированный по углам) шум в первой линии и увеличивает его во второй:

$$\bar{u}_1(\infty) = 2a_2/\varepsilon_2;\ \bar{u}_2(\infty) = 2a_1/\varepsilon_1. \tag{7}$$

Для анализа нестационарной стадии турбулентности введем моменты спектральных плотностей

$$\bar{u}_{1,2}(\tau) = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx u_{1,2}(x,\tau);\ u_{1,2}(\tau) = \int\limits_{x_1}^{x_2} x dx u_{1,2}(x,\tau). \tag{8}$$

Тогда с помощью формальных асимптотических решений $(a^2\tau\gg 1,$ $u_{1,2}(x,\tau)\gg 1)$

$$u_1(x,\tau) = u_1(x,0)\exp\left\{(a^2-x^2)\tau - \varepsilon_1(x+R)\int\limits_0^\tau d\tau\bar{u}_2(\tau) + \varepsilon_1\int\limits_0^\tau d\tau u_2(\tau)\right\};$$

$$u_2(x,\tau) = u_2(x,0)\exp\left\{(a^2-x^2)\tau - \varepsilon_2(x-R)\int\limits_0^\tau d\tau\bar{u}_1(\tau) + \varepsilon_2\int\limits_0^\tau d\tau u_1(\tau)\right\} \tag{9}$$

из системы (4) получим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка $(A_{1,2} \equiv u_{1,2}/\bar{u}_{1,2};\ 2B_{1,2} \equiv \varepsilon_{2,1}\bar{u}_{1,2})$:

$$A_1^2 - a^2 = 2B_2(A_1 - A_2 - R) - d\ln B_1/d\tau;\qquad B_1 = \frac{d}{d\tau}(\tau A_2);$$

$$A_2^2 - a^2 = 2B_1(A_2 - A_1 + R) - d\ln B_2/d\tau;\qquad B_2 = \frac{d}{d\tau}(\tau A_1). \tag{10}$$

Выход шума на стационарное турбулентное состояние можно качественно проследить с помощью линеаризации уравнений (10) около стационарных решений

$$A_{1,2}(\infty) = \pm R \pm \sqrt{R^2 + a^2};\ B_{1,2}(\infty) = A_{2,1}(\infty).$$

В пределе малого переброса $R\ll a$ линеаризованное решение аналогично случаю одной линии /4/ (одного масштаба турбулентности):

$$B_{1,2}(\tau) - B_{1,2}(\infty) = J_0\left(2\sqrt{2a^2\tau}\right);\ a/R\gg a^2\tau\gg 1. \tag{11}$$

Здесь $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Другой класс решений получается в обратном пределе $R \gg a$, когда существенен вклад переброса:

$$B_1(\tau) - B_1(\infty) = (C_1 + C_2 \ln a^2\tau)/a^2\tau;$$

$$B_2(\tau) - B_2(\infty) = -2\frac{R^2}{a^2}\frac{C_2}{a^2\tau}; \quad a^2\tau \gg 1;\ R \gg a. \qquad (12)$$

Здесь C_1 и C_2 - постоянные, определяемые начальными условиями. В отличие от (11) решение (12) описывает апериодический выход турбулентности на стационарное состояние. Возможно также чисто периодическое решение

$$\varphi_1 = C\sin\Omega\tau; \quad \varphi_2 = C\,\frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a}\cos\Omega\tau;$$

$$\Omega = 2aR; \quad a^2\tau \gg 1; \quad a^2\tau \gg 1/aR. \qquad (13)$$

Существенно, что и в этом случае роль вклада R сводится к увеличению шума во второй линии. Особенностью решения (13) является фазовый сдвиг осцилляций второй линии на $\pi/2$ по отношению к первой линии.

Для обсуждаемой турбулентности в ионосфере Земли проще всего реализуется условие $R \gg a$, соответствующее решению, (12). Решение (13) не связано с предположением о величине отношения R/a и может, в частности, реализоваться при $R/a \gg 1$ на достаточно больших временах $a^2\tau \gg 1/aR$.

В заключение получим, пользуясь формулами (7) и (13), выражения полных стационарных шумов для обеих линий и для частоты их осцилляций в нестационарном режиме через параметры плазмы:

$$\left(\frac{E_0^2}{8\pi n_e \varkappa T_e}\right)_{1,2} = 9{,}5\,\frac{\nu_{ei}}{\omega_{Le}}\left(\frac{r_{De}}{r_{Di}} + \frac{r_{Di}}{r_{De}}\right)^2 \frac{E_0}{E_{min}}\left(\frac{3v_{Ti}^3}{v_{Te}^2 c}\right)^{1/3} \times$$

$$\times \begin{cases} \left(\left(\dfrac{E_0 - E_{min}}{3E_0} + \left(\dfrac{v_{Te}}{c}\right)^{4/3}\right)^{1/2} - \left(\dfrac{v_{Te}}{c}\right)^{2/3}\right)^2 \\ \left(\left(\dfrac{E_0 - E_{min}}{3E_0} + \left(\dfrac{v_{Te}}{c}\right)^{4/3}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{v_{Te}}{c}\right)^{2/3}\right)^2 \end{cases};$$

$$\Omega = 2{,}1\nu_{ei}\left[\frac{E_o}{E_{min}}\left(\frac{E_o}{E_{min}} - 1\right)\right]^{1/2}\left(\frac{v_{Te}}{c}\right)^{2/3}.$$

Оценим величину в условиях ионосферы на высотах 95-I05 км в средних широтах 50-55°N зимой в ночное время /5/ ($n_e \simeq 2{,}5\cdot 10^3$ см$^{-3}$, $B_o = 0{,}51$ гс, $T_e \simeq 220°$, $\nu_{en} \simeq 3\cdot 10^4$ сек$^{-I}$). В такой плазме спектр турбулентности из двух линий реализуется при расстройках $\Delta + \omega_{Le}^2/6\Omega_e^2 \simeq 10^{-2}$. Полагая $a^2 \simeq 10^{-6}$, получим для частоты осцилляций нестационарного шума $\Omega \simeq 1$ сек$^{-I}$.

Поступила в редакцию
30 декабря I975 г.

Литература

1. T. R. Hartz, R. E. Barrington. Proc. of IEEE, 57, 1108(1969).
2. Г. А. Гусев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин. Изв. ВУЗов, Радиофизика, I8, 935 (I975).
3. Л. М. Дегтярев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук. Препринт ФИАН, № I3I, I974 г.
4. Г. А. Гусев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин. ЖТФ, 46, № 6, II92 (I976); Препринт ФИАН, № I33, I974 г.
5. Т. Н. Соболева. Депонент ВИНИТИ № 3504-7I (I97I).