Краткие сообщения по физике № 7 1976

N-СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $\sigma_{xt} = e^{\sigma}$

В. А. Андреев

УДК 517.946.4

Методом обратной задачи рассеяния построены N-солитонные решения уравнения $\sigma_{xt} = e^{\sigma}$. Найдены также законы сохранения для этого уравнения, и проанализирована их структура.

Мы будем рассматривать уравнение

$$\sigma_{xt} = e^{\sigma}, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma \to -\infty & \sigma_x \to \mp a & (a>0) \\ |x| \to \infty & x \to \pm\infty & \\ & \sigma_t \to \mp b & \\ & x \to \pm\infty & \end{array}\right| \tag{2}$$

Это уравнение возникает во многих разделах физики и математики /1,2,3/. В работе /2/, при исследовании самофокусировки локальных плазменных токов, Комаровым было найдено общее решение этого уравнения.

В настоящей работе уравнение (1) будет изучаться с помощью обратной задачи квантовой теории рассеяния. Этот метод был развит для решения уравнения Кортевега - де Фриса /4/ и позднее применялся для решения нелинейного уравнения Шредингера /5/, sin-Гордон уравнения /6/ и некоторых других уравнений. Этот метод позволяет не только получать решения нелинейных эволюционных уравнений, но и находить законы сохранения, чего не давали другие, ранее известные методы.

Метод обратной задачи применим к уравнениям, которые можно представить в виде

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} = [\tilde{L}, \tilde{A}], \tag{3}$$

где $\tilde{L}$ и $\tilde{A}$ – линейные операторы, содержащие набор функций $\sigma(x,t)$ в качестве коэффициентов. Уравнение (I) можно представить в виде (3), выбрав

$$\tilde{L} = \frac{1}{i} \rho_2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \sigma_x \rho_1$$

$$\tilde{A}\psi(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{x} \exp \frac{1}{2} [\sigma(x,t) + \sigma(x',t)] (\rho_0 + \rho_3)\psi(x')dx',$$

где ρ_i – матрицы Паули

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следуя обычной методике, мы должны теперь рассмотреть собственные функции оператора $\tilde{L}$

$$\tilde{L}\psi = \lambda\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Эволюция ψ относительно переменной t задается оператором $\tilde{A}$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde{A}\psi = 0$$

Из вида оператора $\tilde{A}$ следует, что только ψ^1 эволюционирует по t, а компонента ψ^2 от времени не зависит. Поэтому дальше нам будет удобнее рассматривать их по отдельности.

Вместо системы уравнений (4) можно написать две другие, эквивалентные ей системы

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \psi^1 + \frac{1}{4} (\sigma_x^2 + 2\sigma_{xx})\psi^1 &= \lambda^2\psi^1 \\ \frac{d}{dx} \psi^1 + \frac{1}{2} \sigma_x\psi^1 &= \lambda\psi^2 \end{aligned}\right| \tag{5}$$

и

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \psi^2 + \frac{1}{4} (\sigma_x^2 - 2\sigma_{xx})\psi^2 &= \lambda^2\psi^2 \\ -\frac{d}{dx} \psi^2 + \frac{1}{2} \sigma_x\psi^2 &= \lambda \psi^1 \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Рассмотрим первое уравнение в системе (6). В соответствии с тем, что ψ^2 от t не зависит, величина $u = \frac{1}{4}\sigma_x^2 - \frac{1}{2}\sigma_{xx}$ тоже от t не зависит. Это проверяется непосредственно

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}(2\sigma_x\sigma_{xt} - 2\sigma_{xxt}) = \frac{1}{4}(\sigma_x e^{\sigma} - (e^{\sigma})_x) = 0$$

т.е. u – интеграл движения.

Займемся теперь первым уравнением системы (5). Временная эволюция ψ^1 должна определяться эволюцией величины $v(x,t) = \frac{1}{4}\sigma_x^2 + \frac{1}{2}\sigma_{xx}$. Для $v(x,t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{\sigma}). \tag{7}$$

Уравнение (7) можно представить в виде $\frac{\partial L}{\partial t} = [L,A]$ с помощью операторов

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x,t),$$

$$A\psi(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \exp\frac{1}{2}(\sigma(x,t) + \sigma(x',t))\psi(x')dx'.$$

Таким образом, эволюция $v(x,t)$ задается оператором A. Поскольку $\lim\limits_{|x|\to\infty} v(x,t) = a^2/4$, перепишем первое уравнение системы (5), которое является уравнением на собственные значения для оператора L, в виде

$$-\frac{d^2\psi^1}{dx^2} + \left(v - \frac{a^2}{4}\right)\psi^1 = \left(\lambda^2 - \frac{a^2}{4}\right)\psi^1 = k^2\psi^1. \tag{5'}$$

Будем рассматривать уравнение (5′) как уравнение Шредингера с потенциалом $(v - a^2/4)$, зависящим от параметра t. Эта зависимость от времени переносится и на S-матрицу потенциала $(v - a^2/4)$. Собственные функции оператора L удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial t} + A\psi^1 = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать его при $|x|\to\infty$. Если ψ^1 есть собственная функция из дискретного спектра оператора A, то при $x\to\infty$ она имеет вид

$$\psi(x,t) \sim c_{\varkappa} e^{-\varkappa x}.$$

При фиксированном собственном значении $k^2 = -\varkappa^2$ зависимость от t может входить в $c_\varkappa$, определяющую асимптотику связанного состояния. Используя уравнение (8) и граничные условия (2), можно показать, что если $\varkappa^2 \neq a^2/4$, то $c_\varkappa$ не зависит от t, а если $\varkappa^2 = a^2/4$, то $c_\varkappa = e^{-bt/2+\delta}$

$$\varkappa^2 \neq \frac{a^2}{4} \quad c_\varkappa = \mathrm{const}$$

$$\varkappa^2 = \frac{a^2}{4} \quad c_\varkappa = e^{-bt/2+\delta}$$

Для функций непрерывного спектра можно показать, что их асимптотики от t не зависят, т.е. при $k^2>0$ элементы S-матрицы $\|S_{ij}\|$, $i,j = 1,2$, не зависят от t. Таким образом, в S-матрице от t зависит только вычет одного полюса $k^2 = -a^2/4$.

Теперь мы можем построить решения уравнения (I). Для этого сначала выберем какой-нибудь конкретный вид S-матрицы и, решая обратную задачу рассеяния, найдем величину $v(x,t)$. После этого, пользуясь уравнением (7), получим

$$\sigma(x,t) = \ln \int \frac{\partial v}{\partial t}\, dx.$$

Как известно, солитонами называются решения, соответствующие S-матрице, у которой $S_{21} = S_{12} = 0$. Односолитонное решение получаем, решая обратную задачу рассеяния для S-матрицы, у которой есть только один полюс $k^2 = -a^2/4$. Ей соответствует

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left(1 + \frac{1}{a}e^{-ax-bt+\delta}\right) + \frac{a^2}{4}.$$

Тогда односолитонное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2), имеет вид

$$\sigma(x,t) = \ln\left(-2\frac{d^2}{dxdt}\ln\left(1 + \frac{e^{-ax-bt+\delta}}{a}\right)\right),$$

где δ – некоторая произвольная фаза. N-солитонные решения получаем, выбирая S-матрицу, у которой вычет в полюсе $k^2 = -a^2/4$ равен $m_1 = e^{-bt+\delta}$, а вычеты остальных полюсов от времени не зависят. Тогда

$$\sigma(x,t) = \ln\left[-2\frac{d^2}{dxdt}\ln\left(\|I + V(x,t)\|\right)\right]$$

где $$V_{ij}(x,t) = \frac{m_i}{\varkappa_i + \varkappa_j} \exp\left[-(\varkappa_i + \varkappa_j)x\right], \qquad \begin{array}{l} \varkappa_1 = a/2, \\ i,j = 1,\dots,N, \end{array}$$

а I – единичная матрица. Так как только m_1 зависит от t, то

$$\sigma(x,t) = \ln\left\{-2\frac{d^2}{dxdt}\ln\left[M_{11}(x) + e^{-bt-\varkappa_1 x+\delta}\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{-\varkappa_i x}}{\varkappa_1+\varkappa_i}M_{1i}(x)\right]\right\},$$

где M_{i1} – миноры первой строки матрицы $\|I + V(x,t)\|$. Такой вид имеют N–солитонные решения. Они состоят из одного движущегося со скоростью $v = b/a$ солитона и $N-1$ неподвижного солитона. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ движущийся солитон проходит по оси x от $-\infty$ до $+\infty$. При этом, за счет взаимодействия с неподвижными солитонами, у него меняется фаза δ. Если неподвижным солитонам соответствуют $\varkappa_i = a_i/2$, то это изменение фазы $\Delta\delta$ равно

$$\Delta\delta = 2\sum_{i=2}^{N}\ln\left|\frac{a - a_i}{a + a_i}\right|.$$

Уравнение (I) имеет бесконечно много законов сохранения. Их можно получить с помощью формулы следов для оператора L. Это такие полиномы $P_n(\sigma,\sigma_x,\sigma_{xx},\dots)$, что сохраняется величина

$$I_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(\sigma,\sigma_x,\sigma_{xx},\dots)dx.$$

Для P_n имеется рекурентная формула

$$P_{n+1}(x,t) = -\frac{d}{dx}P_n - \sum_{k+l=n}P_kP_l, \quad P_1 = v = \frac{1}{4}\sigma_x^2 + \frac{1}{2}\sigma_{xx}.$$

Используя уравнение (6) можно показать, что все P_n имеют вид

$$P_n(x,t) = Q_n(x) + \frac{d}{dx}F_n(x,t),$$

где

$$Q_{n+1}(x) = -\frac{d}{dx}Q_n - \sum_{k+l=n}Q_kQ_l, \qquad Q_1 = u = \frac{1}{4}\sigma_x^2 - \frac{1}{2}\sigma_{xx}.$$

Такое представление для P_n является специфической чертой уравнения (I) и не имеет места в случае других, упоминавшихся выше уравнений.

В заключение автор выражает благодарность В. М. Фадееву, обратившему его внимание на уравнение (I), а также Н. Н. Комарову, Н. П. Коноплевой, И. А. Малкину и И. В. Тютину за ценные советы и внимание к работе.

Поступила в редакцию
23 декабря 1975 г.

Литература

I. И. Н. Векуа. Сибирский математический журнал, I, 33I (I960).

2. Н. Н. Комаров. Ядерный синтез, 3, I74 (I963).

3. В. М. Фадеев, И. Ф. Кварцхава, Н. Н. Комаров. Ядерный синтез, 5, 202 (I965).

4. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura. Phys. Rev. Lett., 19, 1095 (1967).

5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, 6I, II8 (I97I).

6. Л. А. Тахтаджян. ЖЭТФ, 66, 476 (I974).