Краткие сообщения по физике № 7 1976

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОЙ СИСТЕМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

У. Перес Рохас,[ж)] А. Е. Шабад

УДК 533.93

Термодинамический потенциал релятивистского газа электронов и позитронов в магнитном поле вычислен методом функций Грина. Рассмотрено больцмановское разложение и вычислен тензор энергии-импульса.

I. Нашей целью является изучение термодинамических свойств релятивистского газа электронов и позитронов, находящихся во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{B}$. Термодинамический потенциал, отнесенный к единице объема, без радиационных поправок вычисляется по формуле /I/

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{i}{V\beta}\int_0^e de \int d^4x \,Sp\gamma_\nu G_R(x,x|A)A_\nu(x) + \frac{B^2}{8\pi}, \qquad (I)$$

где Ω_0 – термодинамический потенциал без учета взаимодействия с внешним полем, e – заряд электрона, A_ν – вектор-потенциал внешнего поля, β – обратная температура, V – объем. В (I) мы добавили член $B^2/8\pi$, представляющий собой плотность энергии внешнего поля. Этот член за счет бесконечной перенормировки внешнего поля поглощает расходимость, пропорциональную B^2. Благодаря этому механизму в (I) можно сразу брать перенормированное выражение для температурной функции Грина во внешнем поле /I,2/

$$G_R(x,x|A) = G(x,x|A) - G(x,x|A)\Big|_{A=\mu=\beta^{-1}=0} -$$

$$- \int A_\nu(y)\,\frac{\delta G(x,x|A)}{\delta A_\nu(y)}\Big|_{A=\mu=\beta^{-1}=0} d^4y, \qquad (2)$$

ж) Институт фундаментальных технических исследований, Гавана.

в котором последний вычитательный член после подстановки в (I) как раз и ответственен за упомянутую расходимость, пропорциональную B^2. Неперенормированная функция Грина как решение уравнения Дирака в магнитном поле есть

$$G(x,x'|A) = \sum_q \left\{ (N_q^+ - 1)\exp\left[-(\varepsilon_q - \mu)(x_4 - x_4')\right] g_q^+(\vec{r},\vec{r}') - N_q^- \exp\left[-(\varepsilon_q + \mu)(x_4 - x_4')\right] g_q^-(\vec{r},\vec{r}') \right\}$$

для $x_4 > x_4'$ и

$$G(x,x'|A) = \sum_q \left\{ N_q^+ \exp\left[-(\varepsilon_q - \mu)(x_4 - x_4')\right] g_q^+(\vec{r},\vec{r}') - (N_q^- - 1)\exp\left[-(\varepsilon_q + \mu)(x_4 - x_4')\right] g_q^-(\vec{r},\vec{r}') \right\} \qquad (3)$$

для $x_4 < x_4'$, где $N_q^{\pm} = (1 + \exp\{\beta(\varepsilon_q \mp \mu)\})^{-1}$ – средние значения числа электронов (+) и позитронов (–) при химпотенциале μ; $\varepsilon_q = \sqrt{m^2 + p_3^2 + 2eBn}$ – собственное значение энергии, а q обозначает набор квантовых чисел (p_2, p_3, n), $n = 0,1,2\ldots$ Энергия вырождена по p_2. Магнитное поле направлено вдоль оси 3, а его вектор-потенциал выбран как $A_\nu = Bx_1\delta_{\nu 2}$. Спиновое квантовое число фактически засуммировано в функциях $g_q^{\pm}$

$$g_q^{\pm} = (2\varepsilon_q L_2 L_3)^{-1} \exp\left\{ ip_2(x_2 - x_2') + ip_3(x_3 - x_3') \right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C_{n-1,n-1}(\varepsilon_q) & 0 & -D_{n-1,n-1} & -E_{n-1,n} \\ 0 & C_{n,n}(\varepsilon_q) & E_{n,n-1} & D_{n,n} \\ D_{n-1,n-1} & E_{n-1,n} & C_{n,n-1}(-\varepsilon_q) & 0 \\ -E_{n,n-1} & -D_{n,n} & 0 & C_{n,n}(-\varepsilon_q) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Здесь $C_{k,k'}(\varepsilon_q) = (\varepsilon_q \pm m)\varphi_k(\xi)\varphi_{k'}(\xi')$,

$D_{k,k'} = \pm p_2 \varphi_k(\xi)\varphi_{k'}(\xi')$, $E_{k,k'} = \mp i(2eBn)^{1/2}\varphi_k(\xi)\varphi_{k'}(\xi')$.

Система помещена в ящик с линейными размерами $L_{1,2,3}$. $\varphi_n(\xi)$ – функции Эрмита, умноженные на $(eB)^{1/4}$. Переменная ξ равна

$\sqrt{eB}(x_1 - x_0)$, где x_0 есть x_1-координата центра орбиты, равная $x_0 = p_2/eB$. Поскольку $-(L_1/2) < x_0 < (L_1/2)$, то $-L_1eB < 2p_2 < L_1eB$. Поэтому при интегрировании по p_2 в (3) возникает зависимость от заряда, привязанная к ширине ящика L_1. После сокращения L_1 при делении на объем $V = L_1L_2L_3$ эта зависимость приводит к появлению множителя eB. Он должен быть вынесен за знак интегрирования по e в (I), так как при выводе этой формулы с помощью дифференцирования по заряду функционального интеграла $\int \exp\{e\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) + \ldots\}d\bar{\psi}d\psi$ (см. /I/) следует ввести конечный объем уже до дифференцирования, иначе произведение операторов $\psi(x)$ в совпадающих точках не определено (ср. /3/). Поэтому в (I) вместо $\int_0^e f(e)de$ следует вычислять $e\Phi(e) - \lim_{e\to 0} e\Phi(e)$, где $\Phi(e)$ есть первообразная $\int f(e)e^{-1}de$. В чисто полевой части выражения (I) ($\mu = \beta^{-1} = 0$) промежуточная регуляризация расходящегося суммирования по n и p_3 достигается заменой

$$\varepsilon^{-1}_{n,p_3} \to \pi^{-1/2} \int_{\chi_0}^{\infty} 2e\chi^{-1/2}\exp\left\{-(m^2+p_3^2+2eBn)\chi\right\}d\chi$$

с переходом $\chi_0 \to 0$ в окончательном выражении. Неопределенная постоянная в $\Phi(e)$ выбирается так, чтобы не возникал линейный по B и четный по μ вклад в Ω. Подставляя (4), (3), (2) в (I), получим (подробные вычисления будут приведены в работе одного из авторов /4/):

$$\Omega = -\frac{eB}{4\pi^2\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \ln\left[(1+\exp(-(\varepsilon_q-\mu)\beta))(1+\exp(-(\varepsilon_q+\mu)\beta))\right] +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{eB\coth(eB\chi)}{\chi} - \frac{1}{\chi^2} - \frac{e^2B^2}{3}\right)e^{-m^2\chi}\frac{d\chi}{\chi} + \frac{B^2}{8\pi}. \qquad (5)$$

Здесь $\alpha_n = 2 - \delta_{n0}$. Ω_0 в (I) сократилась с членом $\lim_{e\to 0} e\Phi(e)$, который конечен, ибо $\Phi(0)$ расходится, так как использованная регуляция не обслуживает точку $e = 0$. (Сумма по n в температурной части $\Omega(\mu, \beta^{-1} \neq 0)$ также расходится при $e = 0$.) Последний интеграл в (5) представляет собой чисто полевую часть термодинамического потенциала, равную поправке Гайзенберга-Эйлера к энергии вакуума. К (5) можно еще добавить термодинамический потенциал идеального газа фотонов. Та часть выражения (5), которая отвечает электронной компоненте газа, была другим методом ранее построена в /5/.

2. Для химического потенциала в пределах $-m<\mu<m$ при $\beta^{-1}<\infty$ можно разложить логарифмы в (5) по степеням величин $\exp\{-(\varepsilon\mp\mu)\beta\}<1$. Используя представление

$$e^{-k\sqrt{s}} = \int\limits_0^\infty \frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp(-k^2/4t - st)dt, \qquad (6)$$

получим для температурной части в (5)

$$\Omega_\beta = -\frac{eB}{2\pi^2}\sum_{s=1}^\infty \operatorname{ch}(\mu\beta s)(-1)^s\int\limits_0^\infty \exp(-m^2t - \beta^2 s^2/4t)\coth(eBt)\,\frac{dt}{t^2}. \qquad (7)$$

Член с $s=1$ здесь есть больцмановское приближение. Оно применимо при температурах, гораздо меньших порога рождения электрона или позитрона $\beta^{-1}\ll m\mp\mu$. Для того, чтобы избавиться от этого ограничения на температуру, заметим, что неравенства

$$e^{-(\varepsilon\mp\mu)\beta}\ln 2<\ln\left|1+e^{-(\varepsilon\mp\mu)\beta}\right|<e^{-(\varepsilon\mp\mu)\beta} \qquad (8)$$

выполнены: правое – для любых положительных значений величины $\exp\{-(\varepsilon\mp\mu)\beta\}$, а левое для $0<\exp\{-(\varepsilon\mp\mu)\beta\}<1$, т.е. во всем интервале температур $(|\mu|<m)$. Поэтому термодинамический потенциал мажорирован с обеих сторон больцмановскими выражениями и имеет при $\beta^{-1}\to\infty$ ту же асимптотику β^{-4}. Результаты этого пункта применимы непосредственно к случаю "горячего вакуума" $\mu=0$, когда газ нейтрален, а электроны и позитроны возбуждаются только за счет температуры.

3. Тензор энергии-импульса системы в рассматриваемом приближении может быть определен через энергию-импульс составляющих систему электронов и позитронов и энергию-импульс внешнего поля $T^{ext}_{\mu\nu}$ так

$$T_{\mu\nu} = -\lim_{x_\mu\to x'_\mu}\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\right)G_R(x,x'|A)+T^{ext}_{\mu\nu}. \qquad (9)$$

Использование (2), (3) дает следующий результат для тензора (9), усредненного по объему при $V \to \infty$:

$$T_{\mu\nu} = \left(\beta^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta^{-1}} + \mu\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4} + 4F_{\mu\rho}F_{\nu\rho}\frac{\partial\Omega}{\partial F^2} - \delta_{\mu\nu}\Omega, \quad (10)$$

где Ω дается формулой (5). Выражение (10) имеет естественный термодинамический вид. При $\beta^{-1} = \mu = 0$ формула (10) становится выражением $T_{\mu\nu}$ для электромагнитного поля, если $-\Omega$ считать лагранжианом Гайзенберга-Эйлера (напомним, что для магнитного поля лагранжиан от гамильтониана отличается только знаком). В (10) компоненты тензора поля $F_{\mu\nu}$ все равны нулю, кроме $F_{12} = -F_{21} = B$, $F^2 = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2B^2$. Тензор (10) диагонален, и его пространственные компоненты $T_{11} = T_{22} \neq T_{33}$ равны давлениям вдоль соответствующих осей, умноженным на объем. Давление анизотропно. При $eB \gg \beta^{-1}$, $2eB > \mu^2 - m^2$ все частицы находятся в состояниях с $n = 0$ и температурная часть давления поперек внешнего поля исчезает.

Авторы благодарны Е. С. Фрадкину, который курировал эту работу.

Поступила в редакцию
25 февраля 1976 г.

Литература

1. Е. С. Фрадкин. Труды ФИАН 27, 7 (1965).
2. М. А. Браун, Т. Н. Сибиркина, ТМФ, 12, 48 (1972).
3. И. В. Тютин, Е. С. Фрадкин. ЯФ, 12, 417 (1970).
4. H. Peres Rojas. Ciencias Tecnicas, Fisicas y Matematicas (Cuba) (в печати)
5. V. Canuto, H-Y. Chiu. Phys. Rev., 173, 1210,1220,1229 (1968).