Краткие сообщения по физике № 7 1976

О КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин

УДК 533.72

Метод квазистационарных функций распределения, отображающих динамику процессов в многоуровневых системах обобщен на случай непрерывных переменных. Полученная в работе электронная функция распределения существенна при анализе процессов в плазме.

Для целого ряда релаксационных явлений весьма эффективной оказалась методика квазистационарных функций распределения (КРФ) Эти распределения в отличие от равновесных отображают динамику процесса и справедливы только для определенных временных интервалов, определяемых соотношением характерных времен. КФР были получены и нашли применение для исследования кинетики процессов, описываемых с помощью уравнений баланса заселенностей колебательных /I/ и вращательных /2/ состояний молекул, электронных состояний атомов /3/, концентраций многозарядных ионов /4/, компонент интенсивностей спектральных линий в ВКР /5/. Построение КФР основано на разложении функции распределения в ряд по временным производным какого-либо параметра, или по степеням определенного эволюционного оператора, действующего на равновесную функцию распределения /2-5/. Ниже метод КФР, развитый для дискретного спектра, обобщается на непрерывный, когда динамика процесса описывается на основе уравнения Фоккера-Планка. Можно показать, что в случае известной равновесной функции распределения одномерное уравнение Фоккера-Планка приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x}\left(gD\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad 0 < x < \infty \qquad (I)$$

с граничным условием

$$gD\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (2)$$

Здесь D — коэффициент диффузии, зависящий от координаты, а g — — некоторая известная функция.

Проинтегрируем дважды правую и левую часть (I) по x, учитывая граничное условие (2). В результате получим:

$$f = f_o + \int_0^x \frac{dx'}{gD} \int_0^{x'} dx'' g \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f_o = f|_{x=0}. \tag{3}$$

Введем эволюционный оператор

$$\hat{E} = \int_0^x \frac{dx'}{gD} \int_0^{x'} dx'' g \frac{\partial}{\partial t}. \tag{4}$$

Перепишем уравнение (3) в виде:

$$f = f_o + \hat{E}f. \tag{5}$$

Каждую последующую КФР будем строить с помощью эволюционного оператора, последовательно действуя им на предыдущую, начиная с f_o. Первая КФР имеет вид

$$f^{(1)} = f_o + \hat{E}f_o,$$

вторая

$$f^{(2)} = f_o + \hat{E}f^{(1)} = f_o + \hat{E}f_o + \hat{E}^2 f_o$$

и так далее. Таким образом, искомую функцию распределения представим в виде ряда по степеням эволюционного оператора:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{E}^n f_o, \tag{6}$$

или в виде ряда по временным производным параметра f_o:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{d^{(n)} f_o}{dt^n}. \tag{7}$$

Коэффициенты разложения находятся по формуле

$$\beta_n = \int_0^x \frac{dx'}{gD} \int_0^{x'} dx'' g \beta_{n-1}, \quad \beta_o = 1. \tag{8}$$

Слагаемые с высшими производными играют существенную роль лишь на начальной стадии процесса. С течением времени они последовательно уменьшаются и, начиная с некоторого момента, в разложении можно ограничиться лишь конечным числом слагаемых. Предположение о возможности "обрезания" бесконечного ряда (7) основано на том, что система постепенно "забывает" информацию о начальной функции распределения. Функцию распределения, не учитывающую слагаемые, начиная с (n + 1)-ой производной будем называть КФР n-го порядка, а КФР первого порядка – просто КФР. Чаще всего именно эта функция описывает наиболее интересную стадию процесса.

Отметим, что при $g = 1$, $D = D_0 = const$, $f(x,0) = A\delta(x)$ разложение (7) для $f_0 = A(\pi D_0 t)^{-1/2}$ дает точное решение задачи диффузии. В самом деле, вычисляя β_n по формуле (8), имеем $\beta_n = x^{2n}/(2n)!D_0^n$. Подставляя в (7) соответствующие значения β_n и f_0 получаем

$$f = \frac{A}{\sqrt{\pi D_0 t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(- \frac{x^2}{4D_0 t} \right)^n = \frac{A}{\sqrt{\pi D_0 t}} \exp\left(- \frac{x^2}{4D_0 t} \right). \qquad (9)$$

Таким образом, последовательное построение КФР приводит к точному решению.

Для выбора параметра f_0 в общем случае воспользуемся нормировочным соотношением для точной функции распределения

$$\int dxgf = \int_0^{\infty} dxgf(x,0) = const. \qquad (10)$$

Подставляя в левую часть (10) КФР n-го порядка, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение того же порядка для параметра f_0. При этом нужно учитывать, что верхний и нижний пределы интегрирования сами могут быть функциями f_0 или его производных. Решение этого уравнения с условиями

$$\left. \frac{d^{(n)} f_0}{dt^n} \right|_{t \to \infty} = 0 \qquad (11)$$

позволяет однозначно определить параметр f_0. Проиллюстрируем эту процедуру на примере уравнения диффузии. В этом случае КФР имеет вид

$$f^{(1)} = f_0 + \frac{x^2}{2D_0}\frac{df_0}{dt}. \qquad (12)$$

Так как плотность распределения в нуле f_0 является в данном случае монотонно убывающей функцией и $\frac{df_0}{dt}<0$, то существует максимально возможная координата x_m, при которой распределение (12) обращается в нуль:

$$x_m = \left(-\frac{2D_0 f_0}{\dot{f}_0}\right)^{1/2}.$$

Подставляя КФР (12) в левую часть (10) и интегрируя по x от нуля до x_m с начальным распределением $f(x,0) = A\delta(x)$, получаем следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{2}{3} f_0 \left(-\frac{2D_0 f_0}{\dot{f}_0}\right)^{1/2} = A,$$

откуда

$$f_0 = \frac{A}{\frac{4}{3}\sqrt{D_0 t}}. \qquad (13)$$

Видно, что формула (13) совпадает с точным выражением для f_0 с точностью до замены $\sqrt{\pi}$ на 4/3.

Общая методика КФР, изложенная на примере уравнений диффузии, справедлива для широкого класса кинетических уравнений. Так, учет пространственной неоднородности проводится заменой $\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}$ в (4),(7). Рассмотрим теперь кинетическое уравнение для функции распределения электронов по скоростям с положительным источником электронов определенной энергии в предположении, что основными процессами являются упругие столкновения электронов с частицами газа

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[v^2 D\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{mv}{T} f\right)\right] + q; \quad q = \frac{1}{4\pi v_0^2}\frac{dN_e}{dt}\delta(v - v_0). \qquad (14)$$

При этом коэффициент диффузии является линейной функцией скорости /6/:

$$D = D_0 v; \quad D_0 = N_a \sigma_T T/M. \qquad (15)$$

Здесь N_a – концентрация атомов; σ_T – транспортное сечение столкновения электрона с атомом; T – газовая температура; M – масса атома; $mv_0^2/2$ – энергия электронов, рождаемых источником; q – мощность источника.

Полагая $f = f_o U$, $f_o = (\frac{\alpha}{\pi})^{3/2} \exp(-\alpha v^2)$, $\alpha = m/2T$, приводим уравнение (I4) к виду:

$$f_o \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left| v^2 D f_o \frac{\partial U}{\partial v} \right| + \frac{1}{4\pi v_0^2} \frac{dN_e}{dt} \delta(v - v_o). \qquad (I6)$$

Дважды интегрируя правую и левую части (I6) по v и учитывая граничное условие $v^2 D \left.\frac{\partial U}{\partial v}\right|_{v=0} = 0$, находим КФР

$$U = U_0 + \beta_1(v) \frac{dU_o}{dt} - \gamma(v) \frac{dN_e}{dt},$$

$$\beta_1(v) = \int_0^v \frac{dv'}{v'^2 D f_o} \int_0^{v'} dv'' v''^2 f_0; \quad \gamma(v) = \frac{1}{4\pi} \int_{v_o}^{v} \frac{dv'}{v'^2 D f_o}. \qquad (I7)$$

Так как концентрация электронов растет со временем, то $\frac{dU_o}{dt} > 0$ и U в интервале $0 < v < v_m$ является возрастающей функцией, а в интервале $v_o < v < v_m$ убывающей (v_m – граничное значение, при котором U обращается в нуль). Изменение параметров U_o и v_m со временем определяем из решения системы

$$U(v_m) = 0; \quad 4\pi \int_0^{v_m} dv v^2 f_o U = N_e. \qquad (I8)$$

Исследование этой системы для случая $mv_0^2/2 \gg T$ и $\frac{1}{\alpha^{1/2} D_o} \frac{dN_e}{dt} \ll N_e \ll \frac{\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2} D_o v_m^4} \exp(\alpha v_m^2) \frac{dN_e}{dt}$ приводит к следующим значениям параметров:

$$U_o = N_e, \quad \frac{dU_o}{dt} = \frac{dN_e}{dt}. \qquad (I9)$$

Очевидно, что полученная КФР для электронов может быть эффективно применена для анализа распределения электронов в плазме, в частности, при исследовании воздействия электронного пучка на газ.

Поступила в редакцию
I марта 1976 г.

Литература

1. C. E. Treanor, J. W. Rich, R. G. Rehm. J. Chem. Phys., 48, 1798 (1968).
2. С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин. ЖПС, 21, 45 (1974).
3. С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин. ПМТФ, № 4, 18 (1972).
4. С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин. Квантовая электроника, 1, 1752 (1974).
5. С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин. Квантовая электроника, 22, 129 (1975).
6. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич. УФН, 70, 201 (1960).