Краткие сообщения по физике № 7 1976

ЗАТУХАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ УХН В ЛОВУШКАХ

М. В. Казарновский, А. В. Степанов

УДК 539.125.525.5

На основе решения нестационарного уравнения Шредингера рассчитаны и обсуждены ширины волновых функций ультрахолодных нейтронов (УХН) в ловушках.

1. Обычно (см., например, /1-4/) поглощение УХН в стенках ловушки рассматривается в предположении, что на плоскую (с точностью до возможных микроскопических неоднородностей) поверхность стенки ловушки из "бесконечности" падает стационарный поток нейтронов, и рассчитывается отраженный поток; разница этих потоков определяет долю поглощенных нейтронов при однократном столкновении со стенкой. Соотношение между падающей и отраженной волнами определяется условием на логарифмическую производную волновой функции у поверхности стенки. Эта логарифмическая производная содержит всю необходимую информацию о взаимодействии УХН с веществом ловушки. В частности, она простым образом выражается через параметры эффективного оптического потенциала для УХН. При таком подходе, очевидно, не учитываются ограниченность пути нейтрона между двумя последовательными столкновениями и связанные с этим нестационарность нейтронной волновой функции и корреляция фаз волновой функции при последовательных отражениях.

2. Чтобы исследовать роль этих эффектов, рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера для нейтрона в ловушке, однородные стенки которой будем для простоты характеризовать эффективным потенциалом $U = U_o(1 - i\varepsilon)$ (т.е. U_o - действительная, а εU_o - - мнимая части потенциала). Тогда имеем

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Будем искать его решение как суперпозицию функций вида

$$\psi = \sum_j \psi_{oj} \exp\left[-i(E_j - i\Gamma_j)t/\hbar\right],$$

где E_j и $\Gamma_j = \Gamma_j(E)$ – действительные величины. Тогда получим

$$(E_j - i\Gamma_j)\psi_{oj} = \hat{H}\psi_{oj}.$$

Считая для простоты, что ловушка представляет собой две безграничные плоские параллельные стенки, расположенные на расстоянии $2a$ друг от друга, и выбирая ось x вдоль нормали к поверхности стенки, а начало координат в центре между ними, будем искать ψ_{oj} в виде

$$\psi_o(x) = \exp\left[i(k_y y + k_z z)\right]\varphi_j(x).$$

При этом решение уравнения Шредингера, ограниченное при $|x| \to \infty$, имеет вид $(|x| > a)$

$$\varphi_j = \text{const}\, e^{-\varkappa_o |x|(1+i\zeta)}, \qquad k_{oj}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_j - k_y^2 - k_z^2,$$

$$\varkappa_o(1 + i\zeta) = \sqrt{U_o - k_{oj}^2 + i(\Gamma - \varepsilon U_o)},$$

а при $|x| < a$ симметричное и антисимметричное решения, соответственно, равны

$$\varphi_{js}(x) = \text{const}' \cos k_j x, \quad \varphi_{ja}(x) = \text{const}'' \sin k_j x,$$

$$k_j^2 = k_{oj}^2 - i\Gamma_j 2m/\hbar^2.$$

Рассмотрим сначала симметричное решение. Условие равенства логарифмических производных волновой функции на поверхности стенки дает:

$$\varkappa_{oj}(1 + i\zeta) = k_j \operatorname{tg}(k_j a).$$

Отсюда с точностью до членов порядка $(2m/\hbar^2)^2 \dfrac{\Gamma_j^2}{k_{oj}^2}$ получаем

$$\Gamma_j = \frac{k_{oj}^2 \varepsilon}{1 + a\varkappa_{oj}} \frac{\hbar^2}{2m}. \qquad (I)$$

Рассматривая совершенно аналогично антисимметричное решение, получим для Γ_j в точности то же самое выражение.

В упомянутом выше стационарном подходе доля нейтронов, поглощаемых при одном столкновении с плоской однородной стенкой, описываемой тем же эффективным оптическим потенциалом, как легко проверить, равна

$$\mu = 1 - \left| \frac{k_{oj} - i\varkappa_{oj}(1 + i\varepsilon)}{k_{oj} + i\varkappa_{oj}(1 + i\varepsilon)} \right|^2 \approx \frac{2\varepsilon k_{oj}}{\varkappa_{oj}}. \qquad (2)$$

Соответственно, среднее время жизни нейтронов в ловушке

$$\tau = \frac{2a}{v} \frac{1}{2\varepsilon k_{oj}/\varkappa_{oj}}.$$

где v - скорость нейтрона вдоль оси x, m - масса нейтрона. Отсюда

$$\Gamma_j = \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varepsilon k_{oj}^2}{a\varkappa_{oj}}. \qquad (3)$$

Таким образом, Γ, вычисленная в пренебрежении эффектами конечности пробега нейтронов между столкновениями и нестационарностью волновой функции, отличается от вычисленной с учетом этих эффектов на величину $\sim 1/a\varkappa_o$, т.е. как правило, ничтожно малую. Это объясняется тем, что основной характеристикой взаимодействия УХН со стенкой ловушки является логарифмическая производная волновой функции у поверхности стенки, которая определяется параметрами эффективного оптического потенциала и одинакова в стационарном и в нестационарном случаях. Следует, однако, подчеркнуть, что в некоторых специальных случаях, когда размеры ловушки очень малы (сравнимы с длиной волны УХН), рассмотренный эффект может оказаться существенным. Дополнительное усложнение возникает также, если толщина слоя, отражающего нейтроны ("толщина стенки ловушки"), сравнима или меньше длины релаксации в веществе нейтронной волновой функции ψ. Как легко проверить (как при стационарном подходе, так и с помощью нестационарного уравнения Шредингера) в этом случае коэффициенты отражения R и прохождения T нейтронной волны связаны соотношением[ж)]

$$1 - T - R = \frac{2}{\hbar} \int |\psi|^2 \mathrm{Im} U dV, \qquad (4)$$

где ψ нормирована на единичный поток падающих на стенку УХН.

Проведенное выше рассмотрение фактически использует аналогию в поведении УХН в ловушке и поля излучения в резонаторе, когда время затухания определяется добротностью резонатора (а не собственной шириной линии в свободном пространстве). Аналогично, распространение УХН по нейтроноводу может быть исследовано как прохождение волны через волновод. Такой подход позволяет использовать известные результаты теории волноводов, в том числе и с нерегулярными неоднородностями стенок (см., например /5/). Это дает возможность учесть влияние шероховатостей стенок нейтроновода, не прибегая к моделированию закона отражения нейтронной волны от стенки волновода.

3. Эволюцию нейтронного распределения в ловушке можно рассмотреть также, используя результаты известной теории затухания квазистационарного состояния Гайтлера /6/. При этом нет необходимости вводить показатель преломления материала стенки ловушки при описании нагрева УХН, поскольку удается непосредственно вычислить ширину квантовомеханического состояния УХН в ловушке, обусловленную взаимодействием колебаний атомных ядер с экспоненциально затухающей вглубь стенки ловушки нейтронной волной. Выражение для этой ширины имеет вид

$$\Gamma(E) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{f \neq i} |\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle|^2 \delta(E - E_f)$$

где $|f\rangle$ и $|i\rangle$ – невозмущенные (конечное и начальное) состояния системы нейтрон плюс стенка ловушки; E_f – энергия этой системы в состоянии $|f\rangle$. $\hat{H}_{int}$ – возмущение, обусловленное взаимо-

---

ж) Очевидно, это соотношение справедливо для нейтронов с энергией как большей, так и меньшей U_0. Оно позволяет связать результаты экспериментов по прозрачности тонких пленок для надбарьерных нейтронов (ОХН) /2/ и экспериментов по затуханию УХН в ловушках.

действием нейтрона с колебаниями ядер в стенке ловушки. В приближении псевдопотенциала Ферми $\hat{H}_{int} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b \sum_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{R}_\alpha)$ (мы положили для простоты все ядра одинаковыми), b – длина когерентного рассеяния на бесконечно тяжелом ядре.

Рассматривая для определенности сферически симметричное распределение УХН в сферической ловушке радиуса R и учитывая, что $\varkappa_0^2 \ll p_f^2$ ($\vec{p}_f$ – волновой вектор нейтрона после поглощения фонона), а также пренебрегая интерференцией нейтронных волн, рассеянных разными ядрами (некогерентное приближение),[ж)] запишем квадрат модуля матричного элемента взаимодействия в виде

$$|\langle f|\hat{H}_{int}|i\rangle|^2 = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} b\right)^2 \frac{3}{4\pi R^3} \frac{(k/\varkappa_1)^2}{2\pi R} |\langle f_{ph}|\exp(i\vec{p}_f\vec{u})|i_{ph}\rangle|^2 \times$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{N} \Theta(|\vec{R}_\alpha^{(o)}| - R)\exp\left[2\varkappa_0(R - R_\alpha^{(o)})\right] \frac{1}{|\vec{R}_\alpha^{(o)}|^2}.$$

Здесь $\varkappa_1 = \sqrt{2mU_0}/\hbar$, $\vec{R}_\alpha^{(o)}$ и $\vec{u}_\alpha$ – положение равновесия и смещение из этого положения α-го ядра. $\langle f_{ph}|\ldots|i_{ph}\rangle$ – матричный элемент по волновым функциям фононной подсистемы.

Заменяя суммирование по α интегрированием и принимая во внимание известное выражение для полного сечения неупругого рассеяния, отнесенное к одному ядру (в некогерентном приближении),

$$\frac{v_i\sigma(v_i)}{4\pi R^3/3}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4\pi R^3/3} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} b\right)^2 \sum_{f\neq i} \int \frac{d\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \delta(E_i - E_f) |\langle f_{ph}|\exp(i\vec{p}_f\vec{u})|i_{ph}\rangle|^2, \tag{5}$$

имеем

$$\Gamma(E) = \frac{\rho}{2\varkappa_0 R} v\sigma(v) 2\left(\frac{k}{\varkappa_1}\right)^2, \tag{6}$$

ж) Поправки за счет интерференционного рассеяния не превышают 0,2 от результата некогерентного приближения.

где ρ - плотность рассеивающих ядер. Это выражение нетрудно привести к виду

$$\Gamma(E) = \varepsilon \frac{v^2}{2R} \frac{2}{\sqrt{v_{гр}^2 - v^2}}, \quad v_{гр} = \frac{\hbar \varkappa_1}{m}, \qquad (6a)$$

соответствующему приведенной выше формуле (3).

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию
15 марта 1976 г.

Литература

1. Ф. Л. Шапиро. Сообщение ОИЯИ Р3-7135, Дубна, 1973 г.
2. А. Штайерл. II Международная школа по нейтронной физике, Алушта, апрель 1974 г. Сообщение ОИЯИ Д3-7991, стр. 42, Дубна, 1974 г.
3. В. К. Игнатович. Сообщение ОИЯИ Р4-6681, Дубна, 1972 г. В. К. Игнатович, А. В. Степанов. Сообщение ОИЯИ Р4-7832, Дубна, 1974 г.
4. А. В. Степанов. Препринт ИЯИ № 4,1975 г.; Краткие сообщения по физике ФИАН № 8, 34 (1974).
5. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. "Рассеяние волн на статически неровной поверхности" М., "Наука", 1972 г.
6. В. Гайтлер. "Квантовая теория излучения". М., ИЛ, 1956 г.