

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ МЮОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ
С НЕТОЧЕЧНЫМИ ЯДРАМИ

Э. В. Бугаев, Л. Г. Деденко*

УДК 539.12

Рассматривается вопрос о важности учета неточечности ядра при расчете сечений тормозного излучения мюонов. Показано прямым расчетом, что электромагнитный формфактор обрезает распределение по q в области $q \geq \mu$, приводя к уменьшению сечения на 10–15%.

Поправки к сечению тормозного излучения мюона за счет наличия у ядра упругого электромагнитного формфактора (или, проще говоря, за счет конечности размеров ядра) учитывались в ряде работ /1–4/. До сих пор, однако, нет единого мнения о том, насколько велик этот эффект, так как результаты различных авторов отличаются один от другого в несколько раз. Поскольку поправка может быть (и оказывается) достаточно велика, целесообразно еще раз вернуться к этому вопросу. В настоящей работе, в отличие от предыдущих, не используются, во избежание ошибки, готовые формулы, а формфактор ядра вводится в самом начале рассмотрения.

Будем использовать следующие приближения: 1) ядро бесспиновое и достаточно тяжелое, так что можно пренебречь отдачей, 2) взаимодействие мюона с атомом чисто кулоновское и нет возбуждения атомных уровней. В этих приближениях сечение имеет вид (обозначения импульсов частиц такие же, как в /5/):

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{2p_1} \frac{1}{q} L_{44} W_{44} \delta(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \omega) \frac{d^3k d^3p_2}{2\omega_2 \epsilon_2}, \quad (1)$$

$$L_{44} = \frac{1}{2} \sum \left| \bar{u}_2 \left[\frac{1}{\mu^2 x_1} \hat{\epsilon}(i\hat{r}_1 - m) \gamma_4 + \frac{1}{\mu^2 x_2} \gamma_4 (i\hat{r}_2 - m) \hat{\epsilon} \right] u_1 \right|^2, \quad (2)$$

*) Институт ядерных исследований АН СССР

$$W_{44} = \left| \int \langle 0 | \hat{J}_4(\bar{x}) | 0 \rangle e^{-i\bar{q}\bar{x}} d\bar{x} \right|^2. \quad (3)$$

Здесь $\hat{J}_\mu(\bar{x})$ - оператор электромагнитного тока атома. Четвергуг компоненту \hat{J}_μ запишем в виде

$$\hat{J}_4(\bar{x}) = Z\delta(\bar{x} - \bar{X}) - \sum_i \delta(\bar{x} - \bar{x}_i), \quad (4)$$

где \bar{X} , \bar{x}_i - координаты ядра и электронов. Волновая функция атома есть произведение волновых функций системы электронов и ядра

$$|0\rangle = \psi_0(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_Z) \varphi(\bar{X}). \quad (5)$$

Далее, воспользовавшись определенными ядерного (F_n) и атомного (F_e) Формфакторов

$$F_n(q) = \int e^{-i\bar{q}\bar{X}} |\varphi(\bar{X})|^2 d\bar{X}, \quad (6)$$

$$F_e(q) = \frac{1}{Z} \int \sum_i \exp(-i\bar{q}\bar{x}_i) |\psi_0|^2 d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_Z,$$

получим, подставляя (4) и (5) в (3)

$$W_{44} = Z^2 (F_n - F_e)^2. \quad (7)$$

Выражение (I) допускает, в принципе, точное интегрирование по всем переменным, кроме ω и $q/6$. В релятивистском же приближении, когда $v_{1,2}^2 \gg \mu^2$ и $\omega^2 \gg \mu^2$, получается следующий результат /6/:

$$\omega \frac{d\sigma}{d\omega} = 4z^2 \left(r_0 \frac{m}{\mu} \right)^2 \alpha \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} \right) \Phi_1(\delta_1 z) - \frac{2}{3} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \Phi_2(\delta_1 z) \right\}, \quad (8)$$

$$\Phi_1(\delta_1 z) = \int_0^{\infty} \left(q^2 \ln y - \delta^2 \left(\frac{q}{\delta} - 1 \right) \right) (F_n - F_e)^2 \frac{dq}{q^3}, \quad (9)$$

$$\Phi_2(\delta_1 z) = 6\mu^2 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\delta}{q} - \ln y - \frac{\delta^2}{\mu^2} \ln \frac{q}{\delta} \right) (F_n - F_e)^2 \frac{dq}{q^3}. \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) использованы обозначения:

$$\delta = \frac{\mu^2 \omega}{2\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \epsilon = \frac{q^2}{4\mu^2}, \quad (11)$$

$$\ln y \cong \frac{1}{4\sqrt{\xi(1+\xi)}} \ln \frac{1+4\xi+4\sqrt{\xi(1+\xi)} - \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}}}{\sqrt{1-8\xi\frac{\delta}{q} + 16\xi(1+\xi)\frac{\delta^2}{q^2} + 4\sqrt{\xi(1+\xi)}\frac{\delta}{q} - \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}}}}$$

При практическом использовании выражений (8)-(10) целесообразно в области малых q ($q^2 \ll \mu^2$) разлагать $\ln y$ в ряд по ξ . При этом в (10) происходит компенсация старших членов. Ограничиваясь линейными по ξ членами, получим в области $q^2 \ll \mu^2$ для последних интегральных выражений в (9) и (10):

$$q^2 \ln y - \delta^2 \left(\frac{q}{\delta} - 1 \right) \cong (q - \delta)^2, \quad (12)$$

$$1 - \frac{\delta}{q} - \ln y - \frac{\delta^2}{\mu^2} \ln \frac{q}{\delta} \cong \frac{1}{6\mu^2} \left(q^2 + 3\delta^2 - 4\frac{\delta^3}{q} \right) - \frac{\delta^2}{\mu^2} \ln \frac{q}{\delta}. \quad (13)$$

Отметим, что если положить $F_n = 1$ и проинтегрировать (8) по q в той области, где $F_e \cong 0$, то придем к известному выражению для сечения тормозного излучения при произвольной степени экранирования, полученному Г. Бете /7/. В этом случае

$$\Phi_1 = \int_{\delta}^{\mu} (q - \delta)^2 (1 - F_e)^2 \frac{dq}{q^3} + 1, \quad (14)$$

$$\Phi_2 = \int_{\delta}^{\mu} \left(q^2 - 6\delta^2 \ln \frac{q}{\delta} + 3\delta^2 - 4\frac{\delta^3}{q} \right) (1 - F_e)^2 \frac{dq}{q^3} + \frac{5}{6}.$$

Для численных расчетов по формулам (8)-(10) использовались ядерные формфакторы двух видов

$$F_{n1} = \exp \left(-\frac{a^2 q^2}{6} \right); \quad F_{n2} = \left(1 + \frac{a^2 q^2}{12} \right)^{-2}, \quad (15)$$

Расчеты проводились для ядра кремния ($Z = 14$), в интервале энергий $\varepsilon_1 = 10^2 - 10^5$ Гэв, в интервале ω/ε_1 от 0,05 до 0,99. Атомные формфакторы взяты из /8/. Некоторые результаты расчета показаны на рис. 1-3. На рис. 1 и 2 для двух энергий мюона (со-

$$\ln y \cong \frac{1}{4\sqrt{\xi(1+\xi)}} \ln \frac{1+4\xi+4\sqrt{\xi(1+\xi)} - \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}}}{\sqrt{1-8\xi\frac{\delta}{q} + 16\xi(1+\xi)\frac{\delta^2}{q^2} + 4\sqrt{\xi(1+\xi)}\frac{\delta}{q} - \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}}}}$$

При практическом использовании выражений (8)-(10) целесообразно в области малых q ($q^2 \ll \mu^2$) разлагать $\ln y$ в ряд по ξ . При этом в (10) происходит компенсация старших членов. Ограничившись линейными по ξ членами, получим в области $q^2 \ll \mu^2$ для полных интегральных выражений в (9) и (10):

$$q^2 \ln y - \delta^2 \left(\frac{q}{\delta} - 1 \right) \cong (q - \delta)^2, \quad (12)$$

$$1 - \frac{\delta}{q} - \ln y - \frac{\delta^2}{\mu^2} \ln \frac{q}{\delta} \cong \frac{1}{6\mu^2} \left(q^2 + 3\delta^2 - 4\frac{\delta^3}{q} \right) - \frac{\delta^2}{\mu^2} \ln \frac{q}{\delta}. \quad (13)$$

Отметим, что если положить $F_n = 1$ и проинтегрировать (8) по q в той области, где $F_e \cong 0$, то придем к известному выражению для сечения тормозного излучения при произвольной степени экранирования, полученному Г. Бете /7/. В этом случае

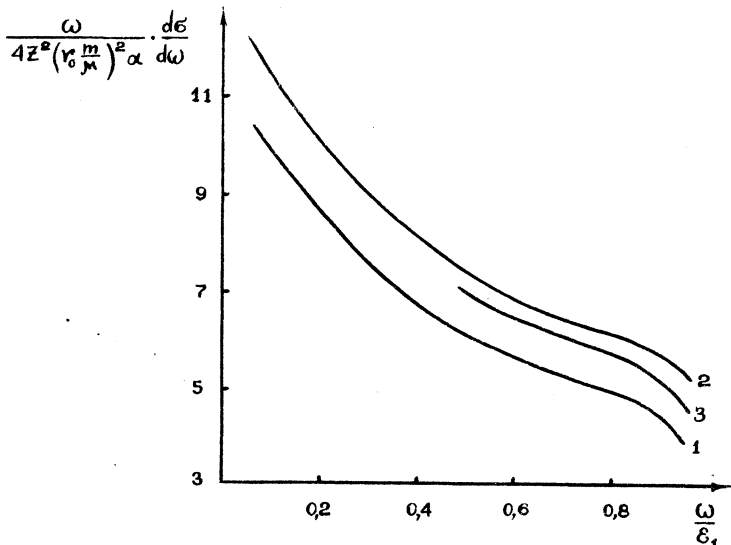
$$\Phi_1 = \int_{\delta}^{\mu} (q - \delta)^2 (1 - F_e)^2 \frac{dq}{q^3} + 1, \quad (14)$$

$$\Phi_2 = \int_{\delta}^{\mu} \left(q^2 - 6\delta^2 \ln \frac{q}{\delta} + 3\delta^2 - 4\frac{\delta^3}{q} \right) (1 - F_e)^2 \frac{dq}{q^3} + \frac{5}{6}.$$

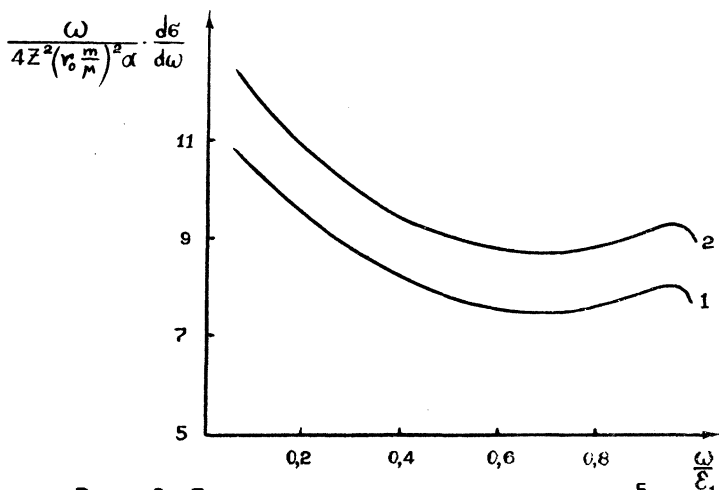
Для численных расчетов по формулам (8)-(10) использовались ядерные формфакторы двух видов

$$F_{n1} = \exp \left(-\frac{a^2 q^2}{6} \right); \quad F_{n2} = \left(1 + \frac{a^2 q^2}{12} \right)^{-2}, \quad (15)$$

Расчеты проводились для ядра кремния ($Z = 14$), в интервале энергий $\varepsilon_1 = 10^2 - 10^5$ Гэв, в интервале ω/ε_1 от 0,05 до 0,99. Атомные формфакторы взяты из /8/. Некоторые результаты расчета показаны на рис. 1-3. На рис. 1 и 2 для двух энергий мюона (со-

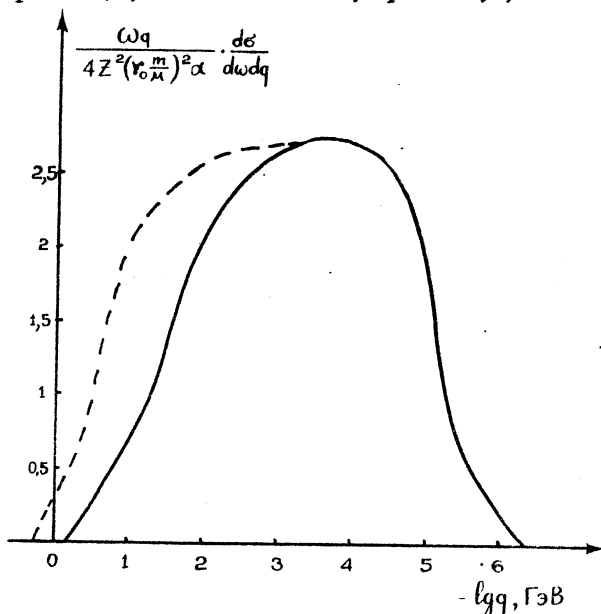


Р и с.1. Сечение тормозного излучения мюона с энергией $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^2$ Гэв на ядре кремния. 1 - мишень - реальное ядро, 2 - точечное ядро, 3 - результат расчета из работы /4/



Р и с.2. То же, что на рис.1, но для $\epsilon_1 = 10^5$ Гэв

ответственно, $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^2$ и $\epsilon_1 = 10^5$ Гэв) приведены результаты настоящего расчета, вычисления для точечного ядра и расчета по формуле работы /4/ (соответственно, кривые 1,2,3). На рис.3 для



Р и с.3. Пример распределения по передаваемому импульсу для точечного (пунктир) и для реального ядер

наглядности приводится дифференциальное сечение $\omega d\sigma/d\omega dq^2$ для $\epsilon_1 = 10^5$ Гэв, $\omega/\epsilon_1 = 0,2$ для точечного (пунктир) и реального ядер. Использование обоих факторов (15) дает совпадающие с точностью $\sim 0,5\%$ результаты.

Общий результат работы таков: учет фактора ядра в сечении тормозного излучения мюона существенен и приводит к уменьшению сечения на 10-15%. Количественно этот результат ближе всего к выводам работы /3/. Отметим, что учет различных неупругих возбуждений, как указано в /4/, в той или иной степени компенсирует это уменьшение. Этот вопрос рассматривается в следующей работе.

Поступила в редакцию
15 марта 1976 г.

Л и т е р а т у р а

1. R. Christy, S. Kusaka. Phys. Rev., 59, 405 (1941).
2. А. Д. Ерлыкин. Изв. АН СССР, сер. физ., 29, 1757 (1965).
3. А. А. Петрухин, В. В. Шестаков. Изв. АН СССР, сер. физ. 32, 517 (1968).
4. Э. В. Бугаев, М. Д. Котов, И. Л. Розенталь. Космические мюоны и нейтрино. Атомиздат, М., 1970 г.
5. А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Наука, М., 1969 г.
6. Э. В. Бугаев. ЖЭТФ, 1976 (в печати).
7. H. Bethe. Proc. Camb. Phil. Soc., 30, 524 (1934).
8. International Tables for X-ray Crystallography, 1962, v. III, Amsterdam.