Краткие сообщения по физике № 10 1976

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ НА НЕКОТОРЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

В. И. Беляк

УДК 539.171

Получены квазиклассические выражения для полного сечения рассеяния частиц на некоторых оптических потенциалах конечного радиуса действия. Эти выражения могут быть полезны при рассмотрении рассеяния нуклонов и мезонов на ядрах.

В работах /1-3/ рассмотрено в эйкональном приближении полное сечение рассеяния частиц на прямоугольном оптическом потенциале. В настоящей работе получены квазиклассические выражения для полного сечения рассеяния на некоторых оптических потенциалах конечного радиуса действия с размытым краем.

Рассеяние частиц будем описывать волновым уравнением

$$\left[\nabla^2 + k^2 n^2(r)\right] \psi(\vec{r}) = 0, \quad n^2(r) \equiv 1 - u(r),$$

где $n(r)$ – комплексный коэффициент преломления, параметрически зависящий от волнового числа k падающих частиц и связанный определенным образом с оптическим потенциалом. Будем полагать, что плотность потока свободных частиц имеет обычный вид (такой же как для уравнения Шредингера или Клейна-Гордона). При этом полное сечение рассеяния частиц σ_t определяется амплитудой

$f(0) = \frac{i}{k} \sum\limits_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2})\left[1 - \exp(2i\delta_l)\right]$, где $\delta_l \equiv \delta(\lambda)$ сдвиг фазы парциальной волны с $l = \lambda - 1/2$. Величины $\delta(\lambda)$ будем вычислять в простейшем квазиклассическом приближении, когда фаза парциальной волны определяется одной точкой поворота r_0.

Полагаем, что эффективный безразмерный потенциал $u(r)$ (называемый далее просто потенциалом) обладает свойствами

I) $u(r) = 0$ при $r \geqslant R$,

II) $u(r)$ разлагается в ряд Тейлора в левой окрестности точки R (причем $u(R - 0) = 0$, $u'(R - 0) \neq 0$),

III) $u(r)$ разлагается в ряд по четным степеням r в окрестности нуля.

Введем величину $\eta = u'(R-0)R/2$. При вычислении $\delta(\lambda)$ в левой окрестности точки $\lambda_{max} = kR$ ограничимся случаем, когда

IV) $\mathrm{Re}\,\eta < 1$ и $\delta(\lambda)$ непрерывна при $\lambda = \lambda_{max}$.

При получении общих выражений для $\delta^{(n)}(0)$ считаем наряду с III, что

V) $r_0 \to 0$ при $\lambda \to 0$. Это имеет место, если $\mathrm{Im}\,u(r) = 0$ и $-\infty < \mathrm{Re}\,u(r) < 1$; а при $\mathrm{Im}\,u(r) \neq 0$ – по крайней мере в области справедливости эйконального приближения, т.е. при достаточно малых $|u(r)|$.

Для конкретной оценки величин $\delta^{(n)}(0)$ будем полагать, что

A) разложение $u(r)$ в левой окрестности R справедливо вплоть до некоторого $R_- = R - \Delta R$, и $u(r) = u(R_-)$ при $r \leqslant R_-$;

B) при $R_- \leqslant r \leqslant R$ нелинейные по $(r-R)$ члены в $u(r)$ (квадратичный член $u_2(r)$ и т.д.) малы по сравнению с линейным членом $u_1(r)$

$$|u_{2+m}(R_-)/u_1(R_-)| \leqslant \gamma \ll 1, \quad m \geqslant 0.$$

В простейшем случае условия A и B приводят к трапецеидальному потенциалу. Подчеркнем, что условие A используется только для оценки величин $\delta^{(n)}(0)$, а истинный потенциал предполагается достаточно плавным при $r < R$. (В противном случае следовало бы учитывать вклад в амплитуду $f(0)$, возникающий из-за излома потенциала при $r = R_-$.)

Переходим к вычислению $f(0)$. В рассматриваемом приближении $\delta(\lambda) = 0$ при $\lambda > \lambda_{max}$, а суммирование в $f(0)$ можно заменить на интегрирование. При интегрировании в $f(0)$ члена $\sim \exp[2i\delta(\lambda)]$ будем учитывать вклад только окрестностей граничных точек 0 и λ_{max}, полагая, что потенциал достаточно плавный при $r < R$ и не приводит к требующим дополнительного учета точкам перевала и особенностям функции $\exp[2i\delta(\lambda)]$ в комплексной плоскости λ. Тогда

$$f(0) = f_0(0) + f_1(0) + f_2(0), \quad f_0(0) = \frac{i}{k}\int_0^{\lambda_{max}} \lambda d\lambda = \frac{i}{2} kR^2, \quad (1)$$

$$f_1(0) = -\frac{i}{k}\int\limits_{L_1} \lambda\exp[2i\delta(\lambda)]\,d\lambda, \quad f_2(0) = \frac{i}{k}\int\limits_{L_2} \lambda\exp[2i\delta(\lambda)]\,d\lambda,$$

где L_1 и L_2 – соответствующие линии наибыстрейшего спада функции $\exp[2i\delta(\lambda)]$ в комплексной плоскости λ, исходящие из точек 0 и λ_{max}.

Учитывая условия III и V, получим следующее разложение $f_1(0)$:

$$f_1(0) = \frac{1}{2k\delta''(0)} \exp[2i\delta(0)] \left\{1 - \frac{i}{6}\,\frac{\delta^{(4)}(0)}{(\delta''(0))^2} + \ldots\right\}, \qquad (2)$$

$$\delta(0) = \int\limits_0^\infty k[n(r) - 1]\,dr, \qquad \delta^{(2m+1)}(0) = 0,$$

$$\delta^{(2m+2)}(0) = -[(2m-1)!!]^2 \int\limits_0^\infty \frac{dr}{(kr)^{2m+1}} (1 - \hat{T}_{2m}) \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n(r)}\right)^{2m+1},$$

$$\hat{T}_{2m}\varphi(r) \equiv \varphi(0) + \varphi'(0)r + \ldots + \frac{1}{(2m)!}\varphi^{(2m)}(0)r^{2m}$$

$$(m \geqslant 0, \ (-1)!! = 1).$$

Используя дополнительно условия A и B, имеем

$$f_1(0) = -kR_0^2\,\frac{n}{pI}\,e^{ip}\left[1 + \frac{i}{p(1-\beta^2)^2 I^2} + \ldots\right], \qquad (3)$$

$$R_0 = R - \Delta R/2, \quad n = n(0), \quad p = 2(n-1)kR_0,$$

$$\beta = \Delta R/2R_0, \quad I = (\mathrm{arth}\beta)/\beta = 1 + (1/3)\beta^2 + \ldots .$$

Здесь всюду (в том числе и в показателе экспоненты) не выписаны величины, отношение которых к основным порядка $\beta(n-1)/(n+1)$ и $\beta\gamma$, а во втором члене разложения отброшены также несущественные величины $\sim (n-1)^2/n$ от основной его части.

Учитывая условия II и $\overline{\text{IV}}$, получим следующее разложение $f_2(0)$:

$$f_2(0) = \frac{i}{2}kR^2\left[-C_0 q^{-2/3} + C_1\,\frac{1 - 6\eta + 2\eta^2 - \xi}{(1-\eta)^2}\,q^{-4/3} + \ldots\right], \qquad (4)$$

$$q = kR\,\frac{\eta}{I(1-\eta)}, \qquad |\arg q| \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \xi = \frac{u''(R-0)}{u'(R-0)}\,R,$$

$$c_0 = \left|\frac{2}{3}\right|^{1/3} \Gamma\left|\frac{2}{3}\right| \approx 1{,}18, \quad c_1 = \frac{2}{5}\left|\frac{2}{3}\right|^{2/3} \Gamma\left|\frac{4}{3}\right| \approx 0{,}27.$$

Для трапецеидального потенциала $\eta = (n^2 - 1)R/2\Delta R$, $\xi = 0$.

В вычисленной выше амплитуде $f(0)$ не учтен квантовый эффект неопределенности в положении рассеиваемых частиц /4/. Этот эффект можно качественно учесть, вводя в $f(0)$ дополнительное слагаемое

$$\Delta f(0) = \frac{i}{2}\,kR^2\left[\xi(kR)^{-2/3} + O((kR)^{-4/3})\right], \tag{5}$$

где $\xi \to 0$ при $\eta \to 0$ и $|\xi| \sim \mathrm{Re}\,\xi \sim 1$ при $|\eta| \gtrsim 1$.

Укажем теперь на физический смысл частей амплитуды (I). Величина $f_0(0)$ представляет амплитуду дифракционного рассеяния вперед на сфере радиуса R. Величина $f_1(0)$ соответствует пределу амплитуды классического рассеяния $f_1^{\text{кл}}(\theta)$ при угле $\theta \to 0$ и прицельном расстоянии $b = b_1(\theta) \to 0$. Величина $f_2(0)$ соответствует пределу $f_2^{\text{кл}}(\theta)$ при $\theta \to 0$ и $b = b_2(\theta) \to R$. При этом первый член разложения (2) для $f_1(0)$ совпадает с $f_1^{\text{кл}}(0)$ (для $f_2(0)$ и $f_2^{\text{кл}}(0)$ такого совпадения нет).*)

При переходе к эйкональному приближению $f_0(0)$ остается без изменения, $\Delta f(0)$ не учитывается, а в $f_1(0)$ и $f_2(0)$ пренебрегаются соответственно величины $\sim(n-1)$ и $\sim\eta$, от основных. При этом для $f_1(0)$ получается выражение, соответствующее варианту эйконального приближения, в котором не используется линеаризация $n(r)$ по $u(r)$.

Исходя из амплитуды $f(0)$, можно вычислить полное сечение $\sigma_t = (4\pi/k)\mathrm{Im}f(0)$.

Если ограничиться для $f_1(0)$ оценкой (3) и учесть (I), (4), (5), то

*) Если схему (I) применить к прямоугольному потенциалу (что во всяком случае возможно в эйкональном приближении), то указанная интерпретация $f_0(0)$ и $f_1(0)$ сохраняется, а для $f_2(0)$ теряет силу. Отметим также, что обычно $f_i^{\text{кл}}(\theta)$ вводятся только для вещественного потенциала.

$$\sigma_t = \sigma_t^0 + \sigma_t^1 + \sigma_t^2 + \Delta\sigma_t, \quad \sigma_t^0 = 2\pi R^2,$$

$$\sigma_t^1 = 2\pi R_0^2 \left\{ - 2\left|\frac{n}{pI}\right| \exp(-\mathrm{Im}p)\left[\sin(\mathrm{Re}p - \arg p + \arg n) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{|p|(1-\beta^2)^2 I^2} \cos(\mathrm{Re}p - 2\arg p + \arg n) + \ldots\right]\right\}, \qquad (6)$$

$$\sigma_t^2 = 2\pi R^2 \left[- C_0 |q|^{-2/3} \cos\left(\frac{2}{3}\arg q\right) + O(q^{-4/3})\right],$$

$$\Delta\sigma_t = 2\pi R^2 \left[(\mathrm{Re}\,\xi)(kR)^{-2/3} + O((kR)^{-4/3})\right].$$

Здесь обозначения частей σ_t соответствуют обозначениям порождающих их частей $f(0)$, и для краткости выписан только первый член разложения σ_t^2. Величины σ_t^0 и σ_t^1 в (6) совпадают (σ_t^1 – в пренебрежении частью, (пропорциональной β^2) с соответствующими величинами для прямоугольного потенциала радиуса R и R_0, имеющего такую же глубину, как исходный потенциал. Для величины σ_t^2, полностью определяемой краем потенциала, такого совпадения нет. Так, в эйкональном приближении для прямоугольного потенциала $\sigma_t^2 = \pi(\pi/k^2)\mathrm{Re}\left[1/(n-1)^2\right]$. В случае линейного размытия края потенциала ($R_- < r < R$) выражение (6) представляет сечение σ_t на соответствующем (см. условие А) трапецеидальном потенциале без учета эффектов, связанных с изломом потенциала при $r = R_-$. Отметим, что вся энергетическая зависимость σ_t содержится в $(\sigma_t - \sigma_t^0)$.

Таким образом, в настоящей работе выполнен простейший квазиклассический учет размытия края оптического потенциала при вычислении полного сечения σ_t. Полученные выражения могут быть полезны при рассмотрении рассеяния нуклонов и мезонов на ядрах, причем для легких ядер условие IV является менее жестким. С другой стороны, изложенный метод вычисления амплитуды рассеяния $f(0)$ с выявлением ее физической структуры (выделением дифракционной, классической и других ее частей) является достаточно общим и применим к широкому классу оптических потенциалов.

Автор благодарит Г. М. Ваградова и В. А. Сергеева за полезные обсуждения.

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию
17 мая 1976 г.

Литература

1. S. Fernbach, R. Serber, T. B. Taylor. Phys. Rev., 75, 1352 (1949).
2. V. Franco. Phys. Rev., 140B, 1501 (1965).
3. В. И. Беляк. Изв. АН СССР, сер. физ., 32, 1686 (1968).
4. H. Feshbach, V. F. Weisskopf. Phys. Rev., 76, 1550 (1949).