Краткие сообщения по физике №1 1975

ГРУППА ПЕРЕНОРМИРОВОК И ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Н. М. Герасимова, М. З. Иофа

УДК 530.145

Методами ренормализационной группы исследуется дважды логарифмическая (д.л.) асимптотика функции в квантовой электродинамике. Показано, что в силу специфической зависимости лестничных графиков от порядка теории возмущений, точная д.л. асимптотика вершины определяется низшим порядком теории возмущений.

Использование уравнений ренормализационной группы (р.г.) представляет собой эффективный способ улучшения аппроксимационных свойств обычной теории возмущений. Например, суммирование старших логарифмов фотонного пропагатора эквивалентно вычислению первого члена ряда Тейлора для функции Гелл-Манна-Лоу /1/.

В этой заметке методом р.г. исследуется дважды логарифмическая (д.л.) асимптотика вершинной функции в квантовой электродинамике /3/. Для вершины написано ренормализационное уравнение. Показано, что в силу специфической зависимости д.л. асимптотики лестничных графиков для вершины от порядка теории возмущений, функция γ с д.л. точностью сводится к функции $\gamma^{(1)}$, вычисленной в низшем порядке теории возмущений. При вычислении следующих за д.л. членов порядка $\alpha \ln(\ldots)\left[\alpha \ln^2(\ldots)\right]^n$, в отличие от случая фотонного пропагатора, необходимо знать все коэффициенты перед членами порядка $\alpha\left[\alpha \ln^2(\ldots)\right]^n$ в γ. Рассмотрен вопрос о выборе точки нормировки вершины и о виде электронного пропагатора.

Перенормированная вершинная функция $\tilde{\Gamma}_\mu$ имеет следующее разложение по независимым тензорным структурам:

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p_1,p_2) = \gamma_\mu \Gamma_{(1)} + \frac{\hat{p}_1 p_{2\mu}}{(p_1 p_2)}\Gamma_{(2)} + \frac{\hat{p}_2 p_{1\mu}}{(p_1 p_2)}\Gamma_{(3)} + \ldots \qquad (1)$$

с условием нормировки в точке (λ_1, λ)

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{(i)} \equiv \Gamma_{(i)}(\alpha d,\ \alpha d^1,\ m,\ p_1^2=\lambda_1^2,\ p_2^2=\lambda_1^2, (p_1-p_2)^2=\lambda^2) =$$

$$= \varphi_{(i)}(\alpha d,\ \alpha d^1,\ m,\ \lambda_1, \lambda). \tag{2}$$

Функции $\Gamma_{(i)}$ рассматриваются в их области аналитичности $(p_1 - p_2)^2 < 0,\ p_{1,2}^2 > m^2$. Переменные изменяются в области

$$\alpha \ln \left| \frac{k^2}{p_{1,2}^2} \right| \ll 1,\quad \alpha \ln^2 \left| \frac{k^2}{p_{1,2}^2} \right| \lesssim 1;\quad \frac{m^2}{p_{1,2}^2} \ll 1;\quad k^2 \equiv (p_1 - p_2)^2. \tag{3}$$

Параметры нормировки (λ_1, λ) выбираются также удовлетворяющими условиям типа (3):

$$\alpha \ln \left| \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} \right| \ll 1,\quad \alpha \ln^2 \left| \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} \right| \lesssim 1. \tag{3'}$$

Переход от точки нормировки $(\lambda,\ \lambda_1)$ к $(\lambda',\ \lambda_1')$ осуществляется с конечной мультипликативной перенормировкой:

$$\tilde{\Gamma}_\mu'(\xi,\ \alpha^1,\ p_1,\ p_2,\ \lambda_1,\ \lambda) =$$

$$= z_1(\xi,\ \alpha^1,\ \lambda,\ \lambda_1,\ \lambda',\ \lambda_1',\ m)\tilde{\Gamma}_\mu'(\xi',\ \alpha^{1'},\ p_1,\ p_2,\ \lambda',\ \lambda_1'),$$

$$\xi \equiv \alpha d = \xi',\qquad \alpha^1 \equiv \alpha d^1 = \alpha^{1'}. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение р.г., соответствующее варьированию λ при фиксированных остальных параметрах, имеет вид

$$\left[\lambda^2(\partial/\partial\lambda^2) + \gamma(\xi,\ \alpha^1,\ \lambda,\ \lambda_1,\ m)\right]\Gamma_{(i)} = 0,$$

$$\gamma = \lambda'^2(\partial/\partial\lambda'^2)\ln z_1 \Big|_{\lambda=\lambda',\ \lambda_1=\lambda_1'}. \tag{5}$$

Для решения уравнения (5) надо определить функцию γ, которую мы получаем из итерационного решения перенормированной системы уравнений Дайсона, и сформулировать граничные условия для функций $\Gamma_{(i)}$, которые выбираются из условия соответствия решения уравнения (5) итерационному решению дайсоновской системы.

Из системы уравнений Дайсона выпишем только уравнение для вершины:

$$\Gamma'_\mu = Z_1\gamma_\mu + \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int \Gamma'_\rho R'_{\rho\mu} \equiv Z_1\gamma_\mu + \Lambda'_\mu, \qquad (6)$$

где $R'_{\rho\mu}$ - перенормированное ядро уравнения Бете-Солпитера для электронно-фотонного рассеяния /2/, Z_1 - зависящая от обрезания константа перенормировки, фиксируемая условием нормировки вершины в точке (λ, λ_1):

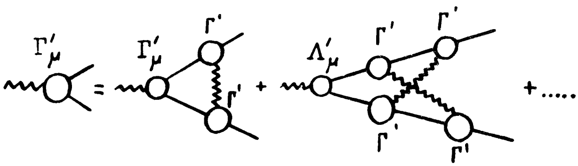
$$\mathring{\Gamma}'_1 = 1. \qquad (7)$$

С учетом (7) уравнение (6) принимает вид

$$\tilde{\Gamma}'_\mu = \gamma_\mu + \Lambda'_\mu - \gamma_\mu \mathring{\Lambda}'_{(1)}. \qquad (8)$$

Будем искать итерационное решение (8) для $\Gamma_{(1)}$ в д.л. области и удерживать в решении только д.л. члены. Из анализа фейнмановских графиков известно, что д.л. вклад в вершину дают только лестничные графики /I/. В д.л. области (3), (3′) с точностью до членов $O\left(\frac{m^2}{p^2_{1,2}}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}\right)$ в функциях Грина можно пренебречь электронной массой.

Из скелетной формы уравнения (8)



следует, что в д.л. области уравнение для $\Lambda_1^{(2n+1)}$ имеет вид:

$$\Lambda_1^{(2n+1)} = K_1^{(2n+1)} - \mathring{\Lambda}_1^{(3)}K_1^{(2n-1)} - \mathring{\Lambda}_1^{(5)}K_1^{(2n-3)} - \ldots - \mathring{\Lambda}_1^{(2n-1)}K_1^{(3)}, \qquad (9)$$

где $K_1^{(2n+1)}$ - сумма всех лестничных графиков n порядка. При выводе (9) было использовано то обстоятельство, что в д.л. области внешних импульсов $p_{1,2}$ внутренние вершины в скелетном разложении Λ'_μ эффективно имеют вид $\gamma(1 - \mathring{\Lambda}'_1)$ (учет члена Λ'_ν не приводит к д.л. $\alpha \ln^2 \left|\frac{k^2}{p^2}\right|$), а перенормированный электронный пропагатор с д.л. точностью имеет вид:

$$G' = \frac{1 + B(\lambda, \lambda_1)}{\hat{p} + m}, \tag{10}$$

где в сожержит д.л. члены, сокращающиеся в силу тождества Уорда с членами, содержащими $\check{\Lambda}_1$ от внутренних вершин (см. также ниже).

В д.л. области при $p^2_{1,2} = \lambda_1^2 \gg m^2$

$$K_1^{(2n+1)} = c^{(2n+1)} \left(\alpha \ln^2 \left|\frac{k^2}{\lambda_1^2}\right|\right)^n. \tag{11}$$

При $p^2_{1,2} = \lambda_1^2$ общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$\ln\Gamma_{(i)} = \Phi_{(i)} \left(\xi, \alpha^1, \frac{k^2}{\lambda_1^2}\right) - \int\limits_c^{\lambda_1^2/\lambda^2} \frac{dx}{x} \gamma(\xi, \alpha^1, x). \tag{12}$$

Откуда с граничным условием (7) для $\Gamma_{(1)}$ получаем

$$\Gamma_{(1)} = \exp\left\{\int\limits_{\lambda_1^2/\lambda^2}^{\lambda_1^2/k^2} \frac{dx}{x} \gamma(\xi, \alpha^1, x)\right\}. \tag{13}$$

Из (9). (11) с д.л. точностью для γ получается выражение

$$\gamma(\xi, \alpha^1, x) = c^{(3)} 2\alpha \ln x + \left[4c^{(5)} - 2c^{(3)^2}\right]\alpha^2 \ln^3 x + \ldots, \tag{14}$$

Специфика д.л. асимптотики в том, что в этом случае $c^{(2n+1)} = 1/n!$, и поэтому в γ все члены, кроме первого, равны 0. Поэтому д.л. асимптотика всей вершины $\Gamma_{(1)}$ дается функцией γ, вычисленной в низшем порядке теории возмущений.

Подчеркнем отличие д.л. асимптотики вершины от случая асимптотики фотонного пропагатора. В последнем случае решение уравнения р.г. имеет вид /I/:

$$\alpha d\left(\alpha, \frac{k^2}{m^2}\right) = \rho^{-1}\left(\ln\frac{k^2}{m^2} + \rho(\alpha)\right),$$
$$\rho(\alpha) = \int_c^{\alpha}\frac{d\alpha'}{\alpha'\beta(\alpha')}, \quad \alpha\beta(\alpha) = \sum_{n=2}^{\infty} c^{(n)}\alpha^n. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для вычисления суммы членов $\left(\alpha\ln^2\frac{k^2}{m^2}\right)^n$ достаточно вычислить β с точностью до α, т.е. знать $c^{(2)}$ и т.д.

В д.л. случае для вычисления вершины необходимо знать весь ряд для γ, и простой вид $\gamma = \gamma^{(1)}$ имеет место только с д.л. точностью. Это вырождение снимается при вычислении следующих членов порядка $\alpha\ln(\ldots)\left[\alpha\ln^2(\ldots)\right]^n$, когда надо определить все коэффициенты $b^{(n)}$ перед членами $\alpha^n(\ln^2 x)^{n-1}$ в (14).

Рассмотрим подробнее вопрос о выборе точки нормировки вершины и о виде электронного пропагатора. Очевидно, что характер зависимости функций $\Gamma_{(i)}$ от переменной k^2 в д.л. области не зависит от выбора точки нормировки вершины. Обычно вершина $\tilde{\Gamma}'_\mu$ (канонически) нормируется на γ_μ при $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, $k^2 = 0$ (в калибровке $d^l = 3$, в которой $\tilde{G}'$ имеет при $p^2 = m^2$ простой полюс), и при этом в силу тождества Уорда вычет в полюсе функции $\tilde{G}'$ равен 1. При нормировке вершины в произвольной точке вычет в полюсе электронного пропагатора отличен от 1. Если использовать канонически нормированную вершину $\tilde{\Gamma}'_\mu$, то, чтобы получить правильно нормированную д.л. асимптотику, приходится работать с точной функцией γ достаточно сложного вида. Преимущество выбора точки нормировки в д.л. области (3) в том, что в этом случае можно сделать специфические для д.л. области пренебрежения и получить простое приближенное выражение для γ, дающее в пределах рассматриваемой точности правильно нормированный ответ.

Уравнение р.г. для $\tilde{G}'$ в силу того, что $z_1 = z_2$ имеет вид (5) со знаком минус перед γ. Граничные условия определяются из итерационного решения дайсоновской системы уравнений. Решение ренормализационного уравнения имеет вид

$$\tilde{G}'_{\lambda\lambda_1} = (\hat{p} + m)^{-1}\exp\left[\frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\left|\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\right|\right]. \tag{16}$$

Это же решение легко получить, если заметить, что электронный пропагатор в канонической нормировке не содержит д.л. членов, а затем с помощью конечной мультипликативной перенормировки $z(2\lambda\lambda_1) = z(1\lambda\lambda_1) = \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\left|\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\right|\right)$ перейти к пропагатору в теории с нормировкой вершины в точке (λ, λ_1).

Отметим, что при нормировке вершины в точке (λ, λ_1) зависящая от обрезания константа перенормировки $Z(1\lambda\lambda_1)$ $(\Gamma'(\lambda\lambda_1) = Z(1\lambda\lambda_1)\Gamma)$ также, как и константа перенормировки Z_1^c, соответствующая канонической нормировке вершины, расходится логарифмически, но при этом конечная перенормировка $z(1\lambda\lambda_1)$ содержит д.л. члены $\left(\alpha\ln^2\left|\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\right|\right)^n$. Граничные условия для функций $\Gamma_{(i)}$ в уравнении (5), определенные с д.л. точностью из дайсоновской системы при изменении переменных в области (3),(3′) и $p_{1,2}^2 = \lambda_1^2$ имеют вид:

$$\mathring{\Gamma}_{(2)} = \mathring{\Gamma}_{(3)} = 1 - \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi}\ \ln^2\left|\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\right|\right), \qquad \mathring{\Gamma}_{(i>3)} = 0, \tag{17}$$

откуда получаются решения:

$$\Gamma_{(1)} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\ln^2\left|\frac{k^2}{\lambda_1^2}\right| - \ln^2\left|\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\right|\right)\right\},$$

$$\Gamma_{(2)} = \Gamma_{(3)} = \Gamma_{(1)}\left\{1 + \exp\left(\frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\left|\frac{k^2}{\lambda_1^2}\right|\right)\right\}, \tag{18}$$

В заключение отметим, что дифференциальные уравнения Ли, получающиеся при варьировании точки нормировки фотонного пропагатора, не приспособлены для получения д.л. асимптотики. Действительно, в этом случае уравнение группы в симметричной форме

$$(\Sigma x_i(\partial/\partial x_i) - \varphi(\alpha)\partial_\alpha - \gamma_s(\alpha, \alpha^1))\Gamma(x_1, x_2, x_3, \alpha, \alpha^1) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{p_{1,2}^2}{\lambda^2};\ x_3 = \frac{k^2}{\lambda^2}, \tag{19}$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{\partial\xi(t,\alpha)}{\partial t}\bigg|_{t=1},\ \gamma_s(\alpha, \alpha^1) = \frac{\partial\ln\Gamma(t,t,t,\alpha,\alpha^1)}{\partial t}\bigg|_{t=1},$$

содержит функцию γ_s, которая не зависит от параметров нормировки вершины и при интегрировании (19) не возникает д.л. членов. Аналогичная ситуация имеет место и в случае несимметричной формы уравнения р.г. для вершины. Этот результат очевиден на языке графиков Фейнмана, так как д.л. вклад дают лестничные графики со свободным фотонным пропагатором.

Авторы благодарят И. В. Тютина и В. Я. Файнберга за обсуждение.

Поступила в редакцию
I декабря 1974 года.

Литература

1. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1973 г.
2. Е. С. Фрадкин. Труды ФИАН, 29, 7 (1965).
3. А. И. Ахиезер, В. Г. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., "Наука", 1969 г.