Краткие сообщения по физике № 5 1975

О КОНЕЧНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКЕ В КВАНТОВОЙ МЕЗОДИНАМИКЕ

С. А. Гаджиев, Ю. А. Тарасов, В. Я. Файнберг

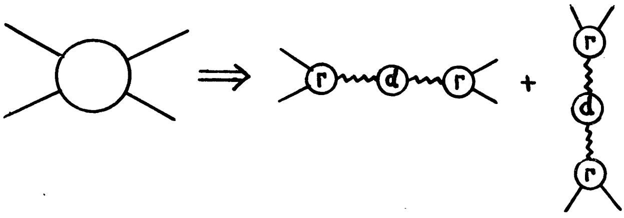
УДК 01.04.02

Показано, что в определенном приближении дисперсионный подход ведет к конечной ренормировке в квантовой мезодинамике. Решение существует только при определенном значении ренорминвариантного голого заряда.

I. В этой заметке мы хотели бы обратить внимание на то, что в определенном приближении дисперсионный подход ведет к конечной ренормировке заряда в псевдоскалярной симметричной мезодинамике. При этом оказывается, что решение существует только при определенном значении перенормированного ренорминвариантного заряда g_0^2 и при произвольном значении ренормированного заряда $g^2 < g_{01}^2$, который таким образом не может быть найден из теории. Эта ситуация соответствует конечной ренормировке в уравнениях ренормгруппы, когда справедлива асимптотическая ренорминвариантность /1/. Этот результат представляется нам интересным прежде всего потому, что исследование псевдоскалярной мезодинамики лагранжевым методом в трехгаммном приближении и методом ренормгруппы в предположении асимптотической ренорминвариантности приводит к отсутствию ультрастабильности (асимптотической свободы) в пределе слабой связи и к появлению нефизических особенностей у функций Грина /2/.

Это исследование является развитием работ по применению дисперсионного метода в квантовой электродинамике /3/ и мезодинамике /4/.

2. Замкнутая система нелинейных дисперсионных уравнений для функций Грина бозона и вершинной части выводится в так называемом двухчастичном приближении в условиях унитарности; точный матричный элемент рассеяния фермиона на антифермионе заменяется двумя простейшими неприводимыми диаграммами Феймана с точными вершинными и одночастичной функциями Грина так, как это изображено на рисунке:



Р и с. I.

Спектральная плотность в представлении Челена-Лемана для α имеет вид

$$\rho(q^2) = \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{n=2}^{\infty} (\mu^2 - q^2)^{-1} \langle 0 | j_\alpha(0) | n^{in} \rangle \times$$

$$\times \langle n^{in} | j_\alpha(0) | 0 \rangle \, \delta^4(p_n - q), \qquad (I)$$

где $j_\alpha(0) = iS^* \dfrac{\delta S'}{\delta \varphi^\alpha_{in}(0)}$ - ренормированный бозонный ток; α - изоиндекс, μ - масса бозона. В дальнейшем всюду под единичным оператором $\sum\limits_n |n\rangle\langle n|$ понимается $\frac{1}{2}\left(|n_{in}\rangle\langle n_{in}| + |n_{out}\rangle\langle n_{out}|\right)$. Это обеспечивает сохранение свойств эрмитовости матричных элементов в любом приближении по числу частиц в промежуточном состоянии.

В двухчастичном приближении из (I) получаем

$$\rho(q^2) = (q^2 - \mu^2)^{-1} q^2 (4\pi^2)^{-1} \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} |F(q^2)|^2. \qquad (2)$$

Инвариантная функция $F(q^2)$ определяется через матричный элемент тока

$$\langle 0 | j_\alpha | \vec{q}_+, \vec{q}_- \rangle = (\bar{u}_+(\vec{q}_+) \gamma_5 \tau_\alpha u_-(\vec{q}_-))(2\pi)^{-3} F(q^2)$$

и связана с вершинной частью $\Gamma(q^2)$ соотношением

$$F(q^2) = d(q^2)\Gamma(q^2). \qquad (3)$$

Ренормированный заряд g равен

$$g = F(\mu^2) = \Gamma(\mu^2). \qquad (4)$$

Дисперсионные соотношения для $F(q^2)$ имеют вид

$$F(q^2) = g + \frac{(q^2 - \mu^2)}{\pi} \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}F(\xi)d\xi}{(\xi - \mu^2)(\xi - q^2 - i\varepsilon)}. \qquad (5)$$

Ограничимся в выражении для ImF двухчастичным промежуточным состоянием и заменим точный матричный элемент рассеяния фермиона на антифермионе приближенным выражением, согласно рис.I. Производя необходимые выкладки, находим искомое выражение для ImF

$$\mathrm{Im}F = \mathrm{Im}d\mathrm{Re}\Gamma + a(q^2)\mathrm{Re}F,$$

где

$$a(q^2) = (16\pi)^{-1}\left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} q^{-2} \int_0^{q^2-4m^2} \xi d\xi \Gamma^2(-\xi)\Delta^c(-\xi). \qquad (6)$$

Отметим, что в рассмотренном нами приближении роль ренорминвариантного заряда играет произведение $\Gamma^2 d$.

В первом неисчезающем приближении теории возмущений получаем из (5) (пренебрегая μ)

$$\mathrm{Im}F = -\frac{3g^2}{16\pi}\left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2},$$

что совпадает с результатами работ /4,5/.

3. Исследуем асимптотические решения системы (2), (5), (6). Нетрудно показать, что эта система не имеет убывающих решений для F и Γ, соответствующих асимптотической свободе ($\Gamma^2 d \to 0$, $q^2 \to -\infty$).

Однако указанная система имеет решение, когда инвариантный заряд $\Gamma^2 d \to \mathrm{const}$, $q^2 \to -\infty$. Это решение соответствует степенному росту F и $Z_3^{-1} = \infty$. Ищем асимптотику для $F(q^2)$, $|q^2| \gg m^2$ в виде

$$F(q^2) = A(-q^2)^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \; A = \mathrm{const}. \qquad (7)$$

Учитывая, что все функции Грина определяются как предел аналитических функций сверху на действительной оси, имеющих разрез справа, находим из (2), (3),(5),(7)

$$\mathrm{Im}F(q^2) = -A(q^2)^{\alpha}\sin\pi\alpha, \quad q^2>0$$

$$\mathrm{Re}F = A(q^2)^{\alpha}\cos\pi\alpha$$

$$\mathrm{Im}d = -A^2|q^2|^{2\alpha}, \quad q^2>0 \tag{8}$$

$$\mathrm{Re}\Gamma = \mathrm{Re}\left(\frac{F}{d}\right) = \frac{|q^2|^{-\alpha}}{A}\sin 2\pi\alpha\cos\pi\alpha$$

$$a \approx \frac{1}{4}\sin 2\pi\alpha .$$

Подставляя (8) в (6), получаем уравнение для определения α

$$\sin\pi\alpha = \frac{3}{4}\sin 2\pi\alpha\cos\pi\alpha,$$

которое имеет два решения

$$\sin\pi\alpha = 0, \quad \cos\pi\alpha = \pm\sqrt{2/3}.$$

Первое решение не годится, так как при этом $\Gamma \longrightarrow \mathrm{const}$ и нарушается условие Лемана-Циммермана и Симанзика /6/ об убывании вершинной части

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{|\Gamma(\xi)|^2\xi(1-4m^2/\xi)^{1/2}d\xi}{(\xi-\mu^2)^2} \leqslant 1. \tag{9}$$

Второе решение соответствует $Z_3 = 0$ и приводит к дискретному ряду собственных значений для α

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\left\{\arccos\sqrt{2/3} + \pi n\right\}, \quad n = 0,1\ldots .$$

Только при $n = 0$ точное решение уравнений (6) переходит при малых q^2 в теорию возмущений.

4. Голый ренорминвариантный заряд оказывается равным

$$g_0^2 = \Gamma^2 d = 4\pi\sin 2\pi\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}4\pi.$$

Условие нормировки (4) и соотношение (9) приводят к единственному ограничению на ренормированный заряд

$$g^2 \leqslant g_0^2.$$

Легко видеть, что разным α_n соответствует одно и тоже значение g_0^2.

Качественные оценки показывают, что если вместо приближенного выражения для амплитуды, изображенного на рис.I, воспользоваться более точным, например, эйкональным приближением, то это слабо изменит результат. Однако попытки оценить вклад отброшенных членов с числом частиц большим двух в промежуточных состояниях наталкиваются на большие математические трудности: усложняются аналитические свойства, величина константы связи g^2 не является малой.

В ближайшем будущем мы предполагаем опубликовать более подробно результаты, связанные с исследованием асимптотики фермионной функции Грина, эйконального и реджевского приближений для амплитуды рассеяния фермиона на фермионе, а также с качественной оценкой вклада высших функций Грина. Представляется также необходимым выяснить, какому приближению в лагранжевом методе соответствует найденное решение.

Поступила в редакцию
IO марта I975 года.

Литература

1. M. Gell-Mann, F. Low. Phys. Rev., 95, 1300 (1959); K. Johnson, M. Baker. Preprint, Seattle, 1973. S. Adler. Phys. Rev., 50, 3021 (1972); В. Я. Файнберг. Сборник "Актуальные проблемы физики элементарных частиц", PI, 2 - 8529, Дубна, I975 г.
2. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 98, 36I (I959).
3. В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 37, I36I (I959); R. Perrin, E. L. Lanon. Ann. of Physics, 33, 328 (1965); Ю. А. Тарасов, препринт ИАЭ - 2207, I972 г.
4. В. В. Маликов, Е. П. Рашевская, В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 38, I803 (I960).
5. P. G. Federbush, M. L. Goldberger, S. B. Treiman. Phys. Rev., 112, 642 (1958).
6. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann. Nuovo Cim., 2, 425 (1955).