Краткие сообщения по физике № 6 1975

ОПИСАНИЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИИ В МЕТОДЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ

Н. Ж. Такибаев

УДК 530.145

Показано, что в рамках дифференциального по константе связи метода и при наличии связанных состояний граничных условий на фазы рассеяния оказывается достаточно для определения решений задачи рассеяния.

I. Дифференциальный по константе связи (ДКС) метод описывает развитие квантовой системы с изменением константы связи g (подробности в /I,2/).

Во многих важных случаях уравнения этого метода сводятся к системе интегро-дифференциальных уравнений для наблюдаемых физических величин - фазы рассеяния η и энергий связи ε_i ($i = 1,2...N$) в системе двух частиц. Так обстоит дело, например, в нерелятивистской теории для интересного с точки зрения физики ядра класса "расщепляющихся" взаимодействий, когда гамильтониан взаимодействия H_{mn} представляет собой произведение двух функций, зависящих соответственно от энергий начального и конечного состояний (E_m и E_n). В этом случае

$$\eta''(E)/\eta'(E) = 2\frac{E}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dE_1\,\eta'(E_1)}{E_1(E_1 - E)} + 2E\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i'/\varepsilon_i(\varepsilon_i + E),$$

$$\varepsilon_i''/\varepsilon_i' - 2\varepsilon_i'/\varepsilon_i = -2\frac{\varepsilon_i}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dE_1\,\eta'(E_1)}{E_1(E_1 + \varepsilon_i)} + 2\varepsilon_i\sum_{j\neq i}^{N} \varepsilon_j'/\varepsilon_j(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \tag{I}$$

где штрих означает дифференцирование по g.

Аналогичные уравнения возникают также и в задачах квантовой электродинамики /3/ и четырехфермионного взаимодействия /4/ в цепочечном приближении.

Граничные условия для фазы рассеяния $\eta(E)$ имеют вид:

$$\eta(E)\big|_{g\to 0} = 0, \quad \eta'(E)\big|_{g\to 0} = \eta_B'(E), \tag{2}$$

где индекс "B" отвечает борновскому приближению. На первый взгляд, сюда нужно добавить еще аналогичные граничные условия для энергий связанных состояний. Задача определения таких условий решалась в работе /5/, но полученные там результаты, как выясняется ниже, справедливы лишь для весьма узкого класса взаимодействий (например, для взаимодействий с нулевым радиусом действия сил).

Более того, в данной заметке устанавливается, что в граничных условиях для ε_i и ε_i' нет никакой необходимости. В силу общих свойств уравнений метода ДКС граничных условий (2) для фазы рассеяния при $g = 0$ оказывается достаточно для нахождения решений при наличии и в отсутствие в системе связанных состояний.

2. Замечательным свойством уравнений метода ДКС является возможность свести систему интегро-дифференциальных уравнений (I) к чисто дифференциальной форме /2,5/ ж):

$$U'' = 0, \tag{3}$$

где функция U есть просто функция Йоста /6/, нормированная к единице при $E = 0$:

$$U = \prod_{i=1}^{N}\left(1 + \frac{E}{\varepsilon_i}\right)\exp\left\{-\frac{E}{\pi}\int_0^\infty \frac{dE_1\,\eta(E_1)}{E_1(E_1 - E - i\delta)}\right\}. \tag{4}$$

Существенно, что уравнение (3) справедливо независимо от того, существуют у двухчастичной системы связанные состояния, или же их нет. Поэтому, если в различных областях переменной g мы имеем дело с задачами, отвечающими разному числу связанных состоя-

---

ж) Уравнения метода ДКС имеют дополнительные "аксиоматические" решения, удовлетворяющие уравнению, несколько более сложному, чем (3). Для этих решений также справедливы все выводы, к которым мы приходим ниже.

ний, то решения этих задач должны переходить друг в друга непрерывно (и с непрерывными производными). Следовательно, достаточно задать значения функции Йоста U и ее производной U' в области переменной g, где нет ни одного связанного состояния, чтобы знать решение общей задачи рассеяния при произвольных значениях g. Заметим, что в области, где нет связанных состояний, система уравнений (I) представляет собой фактически лишь одно уравнение для фазы $\eta(E)$.

Соответственно, решение задачи теперь будет полностью определено граничными условиями (2), если доказать, что точка $g = 0$ принадлежит области, где нет связанных состояний.

Доказательство выглядит довольно просто. Предположим, что в области $g \geqslant 0$ связанных состояний нет, тогда в силу условий (2) граничные условия для функций Йоста будут иметь вид:

$$U\big|_{g\to 0} = 1, \quad U'\big|_{g\to 0} = -\frac{E}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dE_1\,\eta_B'(E_1)}{E_1(E_1 - E - i\delta)}. \qquad (5)$$

Амплитуда рассеяния $f(E)$ в этом случае будет равна /2/:

$$f(E) = g\,\frac{\eta_B'(E)}{\pi\rho(E)}\left[1 - g\,\frac{E}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dE_1\,\eta_B'(E_1)}{E_1(E_1 - E - i\delta)}\right]^{-1}, \qquad (6)$$

где $\rho(E)$ – плотность состояний. Выражение в квадратных скобках в (6)

$$1 + g\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dE_1}{E_1}\,\eta_B'(E_1) - g\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dE_1\,\eta_B'(E_1)}{E_1 - E - i\delta} \qquad (7)$$

для $E<0$ и $g\geqslant 0$ всегда больше единицы, т.е. при положительных (и равных нулю) значениях g амплитуда действительно не имеет полюсов, соответствующих связанным состояниям (интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dE_1}{E_1} \times$ $\times\,\eta_B'(E_1)$ полагаем положительным, считая, что сама константа связи g может иметь оба знака).

В области $g<0$ выражение (7) для $E<0$ может меняться от I (при $E = 0$) до значения

$$1 - |g| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE_1}{E_1} \eta_B'(E_1)$$

при $E \to -\infty$. Когда это значение отрицательно, амплитуда имеет полюс в точке $E = -\varepsilon_i$, которая может быть найдена из условия

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE_1 \eta_B'(E_1)}{E_1 + \varepsilon_i} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE_1}{E_1} \eta_B'(E_1) - \frac{1}{|g|}. \qquad (8)$$

Отсюда можно увидеть, что в области

$$g \geqslant - \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dE_1}{E_1} \eta_B'(E_1) \right]^{-1} \qquad (9)$$

связанные состояния не могут существовать.

3. Приведем в качестве примера модель расщепленного взаимодействия типа Ямагучи /7/, где

$$\eta_B'(E) = \pi \rho(E) V_{ЯМ}^{(B)} = \beta^4 \frac{\sqrt{E}}{(\beta^2 + E)^2}, \qquad (10)$$

β^{-1} – радиус взаимодействия.

Решения имеют вид:

$$U = 1 - ig \frac{\beta^4 \sqrt{E}}{(\beta^2 + E)^2} + g \frac{\beta}{2} \frac{E(E + 3\beta^2)}{(E + \beta^2)^2},$$
$$f(E) = 4\pi g \beta^4 \Big/ \left[(E + \beta^2)^2 + g \frac{\beta}{2} E(E + 3\beta^2) - ig\beta^4 \sqrt{E} \right]. \qquad (11)$$

Амплитуда рассеяния имеет полюс, соответствующий связанному состоянию, в области $g < -2/\beta$. Энергия этого связанного состояния равна

$$\varepsilon = \beta^2 \left[\sqrt{\frac{g\beta}{g\beta + 2}} - 1 \right]^2 \qquad (12)$$

и обращается в бесконечность при $g \to -2/\beta$, а при $g \to -\infty$ стремится к нулевому значению.

В области $g \to -2/\beta$, уровень переходит на второй лист энергии и представляет собой квазистационарный уровень. При $g \geqslant 0$

уровень становится виртуальным, и его энергия при $g \to \infty$ стремится к нулю ($g \to \mp\infty$ соответствует "резонансу в нуле", когда длина рассеяния становится бесконечной).

Автор благодарит Д. А. Киржница за интерес к работе и ценные советы.

Поступила в редакцию
4 апреля 1975 года.

Литература

1. Д. А. Киржниц. ЖЭТФ, 49, 1544 (1965).
2. Д. А. Киржниц. В сб. "Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма". Изд. Наука, 1972 г.
3. Д. А. Киржниц, Г. Ю. Крючков. ТМФ, 11, 152 (1972).
4. Д. А. Киржниц, М. А. Лившиц. Письма в ЖЭТФ, 4, 68 (1966); ЖЭТФ, 52, 804 (1967). М. А. Лившиц. ЯФ, 8, 1245 (1968).
5. Д. А. Киржниц, Г. Ю. Крючков. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 30 (1973).
6. Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц, изд. "Мир", 1969 г.
7. Y. Yamaguchi. Phys. Rev., 95, 1628 (1954).