Краткие сообщения по физике № 7 1975

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАССЕЯНИЯ π-МЕЗОНА НА СТАТИЧЕСКОМ НУКЛОНЕ

Н. Ф. Нелипа, Г. В. Яковлева ж)

УДК 539.125.4

С помощью принципа Шаудера найдены условия существования решения уравнения, описывающего рассеяние π-мезона на статическом нуклоне. Произведена оценка величины константы взаимодействия πN-рассеяния.

1. В последнее время появился ряд работ, в которых для доказательства существования решений уравнений теоретической физики применяются методы функционального анализа. В этих работах уравнение трактуется как операторное уравнение в банаховом пространстве.

Впервые такой подход был разработан и применен Н. Н. Боголюбовым /1/ к уравнениям статистической физики. В дальнейшем этот метод применялся рядом авторов к нелинейным уравнениям квантовой теории поля. Наиболее подробно исследовались нелинейные уравнения Чу-Лоу, к которым применялись принцип сжатых отображений, принцип Шаудера /2/, метод Ньютона - Канторовича /3/. В этих работах удалось доказать существование решения уравнений Чу-Лоу лишь для констант связи λ_1 много меньше экспериментальных ($\lambda_1 \sim 0,1$). Одной из причин такого результата могла быть специфика самой модели Чу-Лоу. Поэтому представляет интерес рассмотрение уравнений, соответствующих более реальным случаям.

Цель настоящей заметки - найти с помощью принципа Шаудера условия существования решений уравнений для рассеяния π-мезона на статическом нуклоне и оценить величину константы связи.

2. Одномерные дисперсионные соотношения, описывающие рассеяние π-мезона на статическом нуклоне, имеют вид (см., например, /4/)

ж) НИИЯФ МГУ.

$$\operatorname{Re} f_i(\omega) = \frac{\lambda_i q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\operatorname{Im} f_i(\omega')}{\omega - \omega'} + \frac{A_{ij} \operatorname{Im} f_j(\omega')}{\omega + \omega'} \right] \frac{d\omega'}{\omega'^2 - 1}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $f_i(\omega)$ – амплитуда рассеяния, λ_i – константа связи, $q(\omega) = \omega^2 - 1$ –кинематический множитель, A_{ij} – матрица перекрестной симметрии.

Если использовать условия унитарности

$$\operatorname{Im} f_i(\omega) = q(\omega) \left| f_i(\omega) \right|^2,$$

то дисперсионное соотношение (I) приводит к нелинейному сингулярному уравнению, которое после замены переменных $h_i(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1} \times f_i(\omega)$ и $t = \frac{1}{\omega}$ перепишется так:

$$h_i(t) = \lambda_i t + \frac{i h_i^2(t)(1 - t^2)^{3/2}}{t^3} - \frac{t}{\pi} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} h_i^2(t')}{t'^4 (t - t')} dt' -$$

$$- \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} A_{ij} h_j^2(t')}{t'^4 (t + t')} dt' \qquad (2)$$

или в операторной форме

$$h_i(t) = A\left[h_i(t)\right]. \qquad (3)$$

3. Найдем условия существования решения уравнения (3) с помощью принципа Шаудера. Последний формулируется следующим образом /5/. Пусть К – компактное выпуклое замкнутое множество банахова пространства В и А – непрерывный оператор, отображающий множество К в себя. Тогда оператор А имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Предположим, что решения уравнения (3) принадлежат к пространству Гельдера $\{f(t)\}$:

$$|f(t)| \leqslant \alpha t^\mu; \qquad |f(t) - f(t')| \leqslant \beta |t - t'|^\mu \qquad (4)$$

с нормой

$$\|f(t)\| = \sup_t |f(t)| + \sup_{t,t^*} \frac{|f(t) - f(t^*)|}{|t - t^*|}, \qquad (5)$$

где α и β – произвольные положительные числа, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Пространство Гельдера удовлетворяет требованиям принципа Шаудера.

Будем искать решения уравнения (3) в виде:

$$h_i(t) = t^2 \omega_i(t), \tag{6}$$

где $\omega_i(t)$ принадлежит пространству Гельдера:

$$|\omega_i(t)| \leqslant \alpha t^\mu, \qquad |\omega_i(t) - \omega_i(t')| \leqslant \beta |t - t'|^\mu .$$

Тогда функции $h_i(t)$ тоже принадлежат пространству Гельдера:

$$\begin{gathered} |h_i(t)| \leqslant \alpha t^\mu, \\ |h_i(t) - h_i(t')| \leqslant (2\alpha + \beta) |t - t'|^\mu . \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно принципу Шаудера, решения уравнения (3) будут существовать на пространстве Гельдера, если выполняются следующие требования:

$$|Ah_i(t)| \leqslant \alpha t^\mu. \tag{8}$$

$$|Ah_i(t) - Ah_i(t^*)| \leqslant (2\alpha + \beta) |t - t^*|^\mu. \tag{9}$$

Оператор A непрерывен. (I0)

4. Найдем условие, при котором выполняется требование (8). Из уравнения (3) имеем

$$|Ah_i(t)| \leqslant |\lambda_i t| + \left| \frac{h_i^2(t)(1 - t^2)^{3/2}}{t^3} \right| + \left| \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} h_i^2(t')}{t'^4 (t - t')} dt' \right| +$$

$$+ \left| \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} A_{ij} h_j^2(t')}{t'^4 (t + t')} dt' \right| . \tag{II}$$

Производя оценку каждого члена, получаем, что требование (8) выполняется, если имеет место неравенство

$$\lambda_i + \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2^{2\mu+1}\pi\mu} + \frac{6\alpha\beta}{\pi\mu} + \frac{2\alpha^2 \ln 2}{\pi} + \frac{\alpha^2}{\pi\mu} \leqslant \alpha. \tag{I2}$$

5. Выясним условие, при котором выполняется требование (9). В соответствии с условием (2)

$$|Ah_i(t) - Ah_i(t^*)| \leqslant \lambda_i |t - t^*| +$$

$$+ \left| \frac{h_i^2(t)(1 - t^2)^{3/2}}{t^3} - \frac{h_i^2(t^*)(1 - t^{*2})^{3/2}}{t^{*3}} \right| +$$

$$+ \left| \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} h_i^2(t')}{t'^4 (t - t')} dt' - \frac{t^*}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} h_i^2(t')}{t'^4 (t^* - t')} dt' \right| +$$

$$+ \left| \frac{t}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} A_{ij} h_j^2(t')}{t'^4 (t + t')} dt' + \frac{t^*}{\pi} \int_0^1 \frac{(1 - t'^2)^{3/2} A_{ij} h_j^2(t')}{t'^4 (t^* + t')} dt' \right| . \tag{13}$$

Оценки членов, входящих в это выражение, дают, что требование (9) выполняется, если

$$\lambda_i + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \frac{2^{\mu+1} + 1}{\pi(1 - \mu)} \alpha\beta + \frac{3(1 - 2^{\mu+1} + 3^{\mu})}{\pi\mu} \alpha\beta +$$

$$+ \frac{4\alpha^2}{3\pi} + \frac{8\ln 2}{\pi} \alpha\beta + \frac{2\alpha\beta}{\pi\mu} + \frac{\alpha^2}{\pi\mu} \leqslant 2\alpha + \beta . \tag{14}$$

6. Оператор A называется непрерывным, если из $\|h_i^{(1)} - h_i^{(2)}\| \to 0$ следует $\|Ah_i^{(1)} - Ah_i^{(2)}\| \to 0$. Учитывая вид нормы (5) и производя оценки, получаем

$$\|Ah_i^{(1)} - Ah_i^{(2)}\| \leqslant \text{const} \sup |h_i^{(1)} - h_i^{(2)}| \leqslant \text{const} \|h_i^{(1)} - h_i^{(2)}\| . \tag{15}$$

Отсюда следует, что, если $\|h_i^{(1)} - h_i^{(2)}\| \to 0$, то $\|Ah_i^{(1)} - Ah_i^{(2)}\| \to 0$, т.е. оператор A непрерывен.

7. Таким образом уравнение (3) имеет решение, если выполняются условия (12) и (14). Последние можно переписать так:

$$\begin{gathered} \lambda_i + M_1\alpha^2 + M_2\alpha\beta \leqslant \alpha , \\ \lambda_i + M_3\alpha^2 + M_4\alpha\beta \leqslant 2\alpha + \beta . \end{gathered} \tag{16}$$

Положительные постоянные величины M_i не зависят от λ_i. Из системы неравенств (I6) можно оценить величину λ_i константы связи πN - рассеяния. Эта константа оказывается равной $\sim 0,1$ (при этом $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta \sim 0$, $\mu \sim 0,5$), что много меньше ее экспериментального значения.

Таким образом, доказанные области существования решений уравнений Чу-Лоу и уравнений для рассеяния π-мезона на статическом нуклоне совпадают.

Поступила в редакцию
9 декабря I974 г.

Литература

I. Н. Н. Боголюбов, Б. И. Хацет. ДАН СССР, 66, 32I (I949). Н. Н. Боголюбов, Д. Я. Петрина, Б. И. Хацет. ТМФ, I, 25I (I969).

2. R. L. Warnock. Phys. Rev., 170, 1323 (1968). H. McDaniel, R. L. Warnock. Nuovo Cim., 66A, 202 (1970). H. McDaniel, R. L. Warnock. Phys. Rev., 180, 1433 (1969).

3. П. Х. Бырнев, В. А. Мещеряков, И. П. Недялков. ЖЭТФ, 46, 663 (I964). A. Ts. Amatuni. Nuovo Cim., 58A, 321 (1968). Т. Конно, Н. Ф. Нелипа, ТМФ, I2, 2I4 (I972).

4. Д. В. Ширков, В. В. Серебряков, В. А. Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. "Наука", I967 г.

5. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, I959 г.