Краткие сообщения по физике № 8 1975

МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША-ГОРДАНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ

В. А. Андреев

УДК 530.I45,539.I2

В работе развит метод суммирования коэффициентов Клебша-Гордана группы O(3). С помощью этого метода вычисляются некоторые суммы, возникающие при расчетах по теории возмущений в моделях атома водорода и магнитного монополя.

В предыдущей работе /I/ была установлена связь между асимптотиками связных состояний магнитного монополя и коэффициентами Клебша-Гордана (к.К.Г.). Эти свойства волновых функций можно использовать при некоторых рассчетах, применяя формулы для суммирования к.К.Г. Эти формулы можно получить, применяя метод, развитый в работе /2/.

Смысл его заключается в следующем: 6 операторов

$$
\begin{aligned}
J_1 &= i\left(\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\mu\,\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\right)\\
J_2 &= -\,i\left(\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{ctg}\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\mu\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right)\\
J_3 &= -\,i\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
N_1 &= -\cos\varphi\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + n\cos\varphi\sin\theta + i\mu\,\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\\
N_2 &= -\sin\varphi\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - n\sin\varphi\sin\theta - i\mu\,\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\\
N_3 &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - n\cos\theta,
\end{aligned}
\tag{I}
$$

где n, μ - целые числа, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ $-\pi\leqslant\varphi<\pi$, образуют алгебру O(4) с операторами Казимира

$$K_1 = J^2 + N^2 + 1 = \mu^2 + (n+1)^2,\quad K_2 = (\vec{J}\vec{N}) = \mu(n+1).$$

Базис представлений этой алгебры можно выбрать двумя способами: выделяя подгруппы $O(4)\supset O(3)\supset O(2)\sim\{\vec{J},\vec{N}\}\supset\{\vec{J}\}\supset\{J_3\}$ и разбивая в прямое произведение

$$O(4) = O(3)\times O(3)\sim\{\vec{J},\vec{N}\}\sim\{\vec{J}+\vec{N}\}\times\{\vec{J}-\vec{N}\}.$$

Коэффициенты, с которыми векторы одного базиса раскладываются по векторам другого, и есть к. К.Г. Для алгебры (I) базисные векторы имеют вид

$$|n,\mu;l,m\rangle = (-1)^l \begin{bmatrix} \frac{n+\mu}{2} & \frac{n-\mu}{2} & l \\ \frac{n+\mu}{2} & -\frac{n-\mu}{2} & \mu \end{bmatrix} D^l_{-\mu,m}(0,\theta,\varphi). \qquad (2)$$

Здесь $\begin{bmatrix} \frac{n+\mu}{2} & \frac{n-\mu}{2} & l \\ \frac{n+\mu}{2} & -\frac{n-\mu}{2} & \mu \end{bmatrix}$ - коэффициент Клебша-Гордана, и

$$\left|\frac{n+\mu}{2};\ \frac{n+\mu}{2}-b\right\rangle\left|\frac{n-\mu}{2};\ -\frac{n-\mu}{2}+a\right\rangle = (-1)^{a+b}(i)^{a-b}\times$$

$$\times(C^a_{n-\mu}C^b_{n+\mu})^{1/2}\, e^{i(\mu+a-b)\varphi}\left(\frac{\sin\theta}{2}\right)^{a+b}\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{n-a-b} = N^{a,b}_{n,\mu}, \qquad (3)$$

$$\left|\frac{n+\mu}{2};\ \frac{n+\mu}{2}-b\right\rangle\left|\frac{n-\mu}{2};\ -\frac{n-\mu}{2}+a\right\rangle =$$

$$= \sum_{l=\mu}^{n}\begin{bmatrix} \frac{n+\mu}{2} & \frac{n-\mu}{2} & l \\ \frac{n+\mu}{2}-b & -\frac{n-\mu}{2}+a & m \end{bmatrix}|n,\mu;l,m\rangle, \qquad m = \mu+a-b.$$

Используя явный вид функции (2) и (3), можно найти много соотношений между к.К.Г.. Возьмем, например, разложение δ-функции по полиномам Лежандра

$$\delta(1-\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta),$$

$$\delta(1+\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(-1)^l P_l(\cos\theta),$$

и проинтегрируем эти выражения с функцией

$$\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^n = \sum_{l=0}^{n} \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \end{bmatrix}^2 P_l(\cos\theta).$$

Это даст нам две суммы

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \end{bmatrix}^2 = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{l=0}^{n} \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \end{bmatrix}^2 = 1. \tag{5}$$

В более общем случае

$$\sum_{l=\mu}^{\infty} (2l+1) D^l_{-\mu,\mu}(0,\theta,0) = \frac{(-1)^\mu \mu}{(\sin\frac{\theta}{2})^2}, \quad \theta \neq 0.$$

С помощью этой формулы получим сумму

$$\sum_{l=\mu}^{n} \begin{bmatrix} \frac{n+\mu}{2} & \frac{n-\mu}{2} & l \\ \frac{n+\mu}{2} & -\frac{n-\mu}{2} & \mu \end{bmatrix}^2 (-1)^l = (-1)^\mu \frac{\mu}{n}, \tag{6}$$

а из соотношения

$$\sum_{l=\mu}^{\infty} (2l+1)(-1)^l D^l_{\mu,\mu}(0,\theta,0) = \frac{2(-1)^\mu \mu}{1+\cos\theta}, \quad \theta \neq \pi,$$

получим сумму

$$\sum_{l=\mu}^{n} \begin{bmatrix} \frac{n+\mu}{2} & \frac{n-\mu}{2} & l \\ \frac{n+\mu}{2} & -\frac{n-\mu}{2} & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n+\mu}{2} & \frac{n-\mu}{2} & l \\ \frac{n+\mu}{2}-2\mu & -\frac{n-\mu}{2} & -\mu \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+\mu} \mu (C^{2\mu}_{n+\mu})^{1/2} \sum_{i=0}^{n-\mu} (-1)^i \frac{C^i_{n-\mu}}{n-i}. \tag{7}$$

Другие суммы можно получить, интегрируя произведение функций (3)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} N^{a_1,b_1}_{n_1,\mu} \left(N^{a_2,b_2}_{n_2,\mu}\right)^* \sin\theta d\theta d\varphi, \qquad a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = d.$$

Тогда получим сумму

$$\sum_{l=\max(\mu,\mu+d)}^{\min(n_1,n_2)} \frac{1}{2l+1}\begin{bmatrix} \frac{n_1+\mu}{2} & \frac{n_1-\mu}{2} & l \\ \frac{n_1+\mu}{2} & -\frac{n_1-\mu}{2} & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{n_2+\mu}{2} & \frac{n_2-\mu}{2} & l \\ \frac{n_2+\mu}{2} & -\frac{n_2-\mu}{2} & \mu \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{n_1+\mu}{2} & \frac{n_1-\mu}{2} & l \\ \frac{n_1+\mu}{2}-b_1 & -\frac{n_1-\mu}{2}+a_1 & \mu+d \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{n_2+\mu}{2} & \frac{n_2-\mu}{2} & l \\ \frac{n_2+\mu}{2}-b_2 & -\frac{n_2-\mu}{2}+a_2 & \mu+d \end{bmatrix}=$$

$$=\left(C^{a_1}_{n_1-\mu}\,C^{a_2}_{n_2-\mu}\,C^{b_1}_{n_1+\mu}\,C^{b_2}_{n_2+\mu}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{a_1+b_2}\frac{(-1)^i C^i_{a_1+b_2}}{i+n_1+n_2+1-a_1-b_2}\right). \tag{8}$$

В работе /I/ было получено выражение для асимптотик связных состояний магнитного монополя

$$\left|A^{\mu}_{n,l}\right|^2=\frac{4^n}{(n+2\mu)!\,n!}\,\frac{1}{2l+1}\begin{bmatrix} \frac{n}{2}+\mu & \frac{n}{2} & l \\ \frac{n}{2}+\mu & -\frac{n}{2} & \mu \end{bmatrix}^2 .$$

Этим выражением можно воспользоваться при рассчетах по теории возмущений. Пусть у нас имеется сферически симметричный потенциал $V(r)$, который отличен от нуля только при $r > r_o$. В первом порядке теории возмущений добавки к энергии вычисляются по формуле

$$\Delta E^{n,\mu}_{l,m}=\iiint \Psi^{n,\mu}_{l,m}(r,\theta,\varphi)V(r)\Psi^{*\,n,\mu}_{l,m}(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi. \tag{9}$$

Пусть r_o настолько велико, что в формулу (9) можно вместо точных функций $\Psi^{n,\mu}_{l,m}$ поставить их асимптотики

$$\Delta E^{n,\mu}_{\text{сред}}=\frac{1}{n^2-\mu^2}\sum_{l=\mu}^{n-1}(2l+1)\Delta E^{n,\mu}_{l,m}. \tag{10}$$

В случае кулоновской задачи $\mu = 0$

$$\Delta E^n_{\text{сред}} = \frac{1}{n^2}\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)E^n_{l,m} =$$

$$= \frac{4\pi}{n^2}\, f(n)\int\limits_0^\infty R_n^2(r)V(r)r^2dr \sum_{l=0}^{n-1}\begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & l \\ \frac{n-1}{2} & -\frac{n-1}{2} & 0 \end{bmatrix}^2 .$$

С помощью формулы (5) сразу вычисляем сумму, а формула (4) показывает, что $\sum_i (4i+1)\Delta E^n_{2i} = \sum_i (4i+3)\Delta E^n_{2i+1}$, т.е. сумма сдвигов с нечетными l равна сумме сдвигов с четными l. В случае магнитного монополя формула (7), являющаяся аналогом формулы (5), не позволяет нам просуммировать ряд (10), так как в нее входят к.К.Г. другого вида, но формула (6) показывает, насколько сумма сдвигов с четными l отличается от суммы сдвигов с нечетными l.

Рассмотрим теперь другую задачу. В нашем приближении вероятность перехода с уровня n на уровень k равна

$$w^{k,n}_{l,\mu} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2}+\mu & \frac{n-1}{2} & l \\ \frac{n-1}{2}+\mu & -\frac{n-1}{2} & \mu \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac{k-1}{2}+\mu & \frac{k-1}{2} & l \\ \frac{k-1}{2}+\mu & -\frac{k-1}{2} & \mu \end{bmatrix}^2 \times$$

$$\times \frac{16\pi^2}{(2l+1)^2}\left(\int\limits_0^\infty R_n(r)V(r)R_k(r)r^2dr\right)^2 \frac{f(n)f(k)}{\hbar^2\omega_{nk}} .$$

Пусть частица с равными вероятностями обладает любыми значениями l и m, тогда вероятность дается формулой

$$w^{n,k}_{\mu} = \frac{1}{\min(n^2-\mu^2,\ k^2-\mu^2)}\sum_{l=\mu}^{\min(n,k)}(2l+1)w^{n,k}_{\mu,l} =$$

$$= \frac{F(n,k)}{\min(n^2-\mu^2,\ k^2-\mu^2)}\sum_{l=\mu}^{\min(n,k)}\frac{1}{2l+1}\times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2}+\mu & \frac{n-1}{2} & l \\ \frac{n-1}{2}+\mu & -\frac{n-1}{2} & \mu \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac{k-1}{2}+\mu & \frac{k-1}{2} & l \\ \frac{k-1}{2}+\mu & -\frac{k-1}{2} & \mu \end{bmatrix}^2 .$$

Это сумма вида (8). Она справедлива как для кулоновской задачи, так и для магнитного монополя.

Поступила в редакцию
23 апреля 1975 г.

Литература

1. В. А. Андреев. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 32 (1975).
2. В. А. Андреев. Препринт ФИАН № 76, 1974 г.