Краткие сообщения по физике № 8 1975

О ПРОСТЕЙШЕЙ СХЕМЕ ДИАГНОСТИКИ ПО ИСКАЖЕННОМУ СИГНАЛУ

Д. И. Гудзенко, А. Е. Соркина

УДК 621.396

Обсуждается методика анализа сигнала объекта в ходе затухания на длинной линии.

Нередко бывает, что сигнал нерегулируемого объекта доступен наблюдению только после его искажения пассивной системой, качественный характер которой можно предполагать известным. Как важный для медицины пример отметим диагностику по пульсациям вены, выводящей кровь из анализируемого органа. В простейшей схеме вещественный сигнал объекта $V_0(t)$ флуктуирует под действием слабого стационарного шума около точки покоя $\bar{V}_0$ дифференциального оператора n-го порядка

$$D^{(n)}\left[V_0(t)\right] = F(t);$$

$$\langle F(t)\rangle \equiv 0, \quad \langle F(t)F(t+\tau)\rangle = 0 \text{ при } |\tau| > \tau_0, \quad D^{(n)}\left[\bar{V}_0\right] = 0, \tag{1}$$

причем время корреляции шума τ_0 существенно меньше всех характерных времен динамической системы $D^{(n)}[V(t)] = 0$. Сигнал $V(x,t)$ наблюдается в точках x выходящей из объекта длинной линии. Затухание вдоль линии позволяет не учитывать отраженные волны. Искаженный затуханием сигнал $V(x,t)$ удовлетворяет телеграфному уравнению:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t) = a\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(x,t) + 2b\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) + cV(x,t);$$

$$a,\ b,\ c > 0; \quad V(0,t) = V_0(t), \quad V(\infty,t) = 0. \tag{2}$$

Малость флуктуаций сигнала $\xi_0(t) \equiv V_0(t) - \langle V_0(t)\rangle$ приводит к линеаризации оператора $D^{(n)}[V] \to L^{(n)}[\xi]$ около точки покоя, поэтому

$$L^{(n)}[\xi_0(t)] = F(t);$$

$$L^{(n)}[\xi(t)] \equiv \sum_{k=0}^{n} D_k^{(n)} \frac{d^k\xi}{dt^k}(t), \quad \langle V_0(t)\rangle = \bar{V}_0. \tag{1a}$$

Обсуждаемый здесь этап анализа состоит в оценке по регистрируемому искаженному сигналу $V(x,t)$ $n+1$ числа – параметров $l_k = D_k^{(n)}/D_n^{(n)}$ $(k = 0, n-1)$ и V_0 изучаемого объекта.

Подставив в уравнение (2) амплитудный спектр

$$g(x,\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x,t)\exp(-i\omega t)dt$$

флуктуаций $\xi(x,t) \equiv V(x,t) - \langle V(x,t)\rangle$ искаженного сигнала, получим

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,\omega) = (c - a\omega^2 + 2b\omega i)g(x,\omega)$$

и далее

$$g(x,\omega) = g_+(\omega)\exp\left[K(\omega)x\right] + g_-(\omega)\exp\left[-K(\omega)x\right],$$

$$K(\omega) = \sqrt{c - a\omega^2 + 2b\omega i} = R(\omega) + iJ(\omega).$$

В силу затухания сигнала вдоль линии дисперсия флуктуаций должна с ростом x убывать, поэтому напишем

$$g(x,\omega) = g(\omega)\exp\left\{-\left[|R(\omega)| + iJ(\omega)\mathrm{sgn}R(\omega)\right]x\right\},$$

$$g(\omega) = \begin{cases} g_+(\omega) \text{ при } R(\omega)<0, \\ g_-(\omega) \text{ при } R(\omega)>0; \end{cases} \qquad \mathrm{sgn}R = \begin{cases} 1 \text{ при } R>0, \\ -1 \text{ при } R<0. \end{cases} \tag{3}$$

Если $g_0(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0(t)\exp(-i\omega t)dt$ – амплитудный спектр флуктуаций неискаженного сигнала, то из (2) и (3) следует $g(\omega) = g_0(\omega)$. Спектральная интенсивность искаженных флуктуаций

$$G(x,\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi(x,t)\xi(x,t+\tau)\rangle\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

соответственно (3) изменяется по закону (см., например, /I/):

$$G(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle g(x,\omega+\nu)g^*(x,\omega)\rangle\exp(i\nu t)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty}\langle g_0(\omega+\nu)g_0^*(\omega)\rangle\times$$

$$\times\exp\left\{-\left[|R(\omega+\nu)| + |R(\omega)| + iJ(\omega+\nu)\mathrm{sgn}R(\omega+\nu) - iJ(\omega)\mathrm{sgn}R(\omega)\right]x + i\nu t\right\}d\nu.$$

Подставив сюда спектральную корреляционную функцию стационарных флуктуаций сигнала $\langle g_0(\omega + \nu) g_0^*(\omega) \rangle = G_0(\omega)\delta(\nu)$, получаем простую формулу

$$G(x,\omega) = G_0(\omega)\exp\left[-2|R(\omega)|x\right], \qquad (4)$$

где $G_0(\omega)$ - спектральная интенсивность неискаженного сигнала $V_0(t)$.

Таким образом, определив $G(x,\omega)$ в двух фиксированных точках x_1 и x_2 длинной линии, можно пересчитать спектральную интенсивность на вход линии, определив тем самым интенсивность неискаженных флуктуаций. Затем оценка параметров l_k объекта может быть проведена, например, традиционным способом - с помощью корреляционной функции сигнала объекта

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega = \langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle .$$

Отношения коэффициентов $D_k^{(n)}$ могут быть найдены из уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} D_k^{(n)} \frac{d^k}{d\tau^k} B(\tau) = 0 \qquad \text{при} \qquad \tau > \tau_0,$$

получаемого очевидным образом из (Iа).

Аналогичные рассуждения, только существенно более простые, проводятся для получения оценки точки покоя $\bar{V}_0$ динамической системы объекта. Из (2) получим последовательно

$$\frac{d^2\bar{V}}{dx^2}(x) = c\bar{V}(x), \qquad \bar{V}(x) = \bar{V}_0\exp(-\sqrt{c}x),$$

где $\bar{V}(x) \equiv \langle V(x,t) \rangle$ - математическое ожидание искаженного сигнала.

Необходимые в этой задаче статистические усреднения не должны вызывать принципиальных осложнений, в силу стационарности (и, конечно, эргодичности) регистрируемых флуктуаций усреднения по ансамблю заменяются простым усреднением по времени. В настоящее время представляется, что наибольшая трудность в такого рода исследованиях окажется связанной с отысканием аддитивной составляющей координат x_1 и x_2 точек длинной линии, в которых регистрируется искаженный сигнал. Возможно, единственный универсальный рецепт отыскания координаты x определится максимизацией информации при $x = 0$.

Поступила в редакцию
10 июня 1975 г.

Литература

1. Л. И. Гудзенко. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 1, 20 (1974).