

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УПОРЯДОЧЕННОЙ МИНИМИЗАЦИИ  
РИСКА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

В. Н. Вапник,\*) С. С. Вербицкий, А. И. Михальский,\*)  
Б. С. Ратнер, А. Н. Сергиевский, А. А. Соткина\*')

УДК 539.172.3

Для нахождения сечений фотоядерных реакций используется метод упорядоченной минимизации риска.

Определение зависимости от энергии сечений фотоядерных реакций на основе данных о выходе реакции, полученных с помощью тормозного спектра излучения, является сложной экспериментальной задачей. Сопоставление результатов изучения одной и той же реакции в разных лабораториях указывает на существование заметных расхождений, например, для реакции  $^{141}\text{Pr}(\gamma, n)/I/$ . Одна из основных трудностей проблемы заключается в некорректности интегрального уравнения Вольтерра 1 рода, связывающего спектр излучения  $K(x, y)$  с выходом  $U(x)$ , измеренным с ошибкой  $\Delta U(x)$ , и сечением реакции  $Z(y)$

$$U(x) = A[x, z] = \int_a^x Z(t)K(x, t)dt. \quad (I)$$

Существующие методы нахождения сечений фотоядерных реакций обладают определенными недостатками, особенно ощутимыми при попытках выявления тонкой структуры в сечениях. Широко применяемый метод Пенфолда-Лисса /2/ в отдельных случаях приводит к неустойчивому решению /I/. Использование методов, основанных на регуляризации уравнения (I) /3,4,5/, также не исключает возможности возникновения ложной структуры /6/.

В настоящей работе предлагается применить для нахождения сечений фотоядерных реакций метод упорядоченной минимизации рис-

---

\*) Институт проблем управления АН СССР.

ка. Суть метода заключается в следующем. Будем рассматривать задачу решения уравнения (I) как задачу минимизации функционала среднего риска

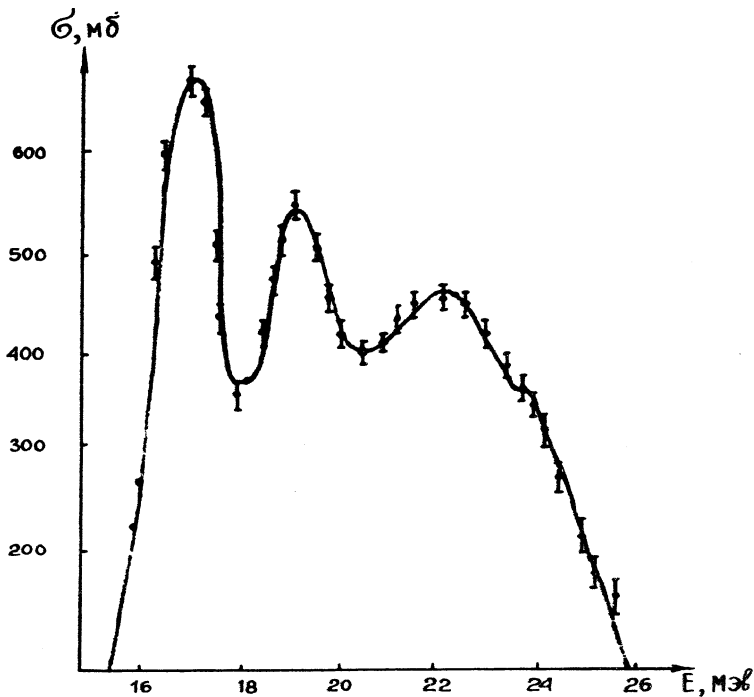
$$J(z) = \int (\Delta[x, z] - y)^2 dP(y, x). \quad (2)$$

Функционал (2) равен величине среднеквадратичного отклонения значений экспериментальной кривой выхода от кривой, соответствующей сечению  $z(t)$ . Легко видеть, что если экспериментальная кривая выхода не содержит систематических погрешностей, то минимальное значение функционала среднего риска достигается на функции  $z(t)$ , совпадающей с сечением изучаемой реакции. Поскольку функция распределения  $P(y, x)$  априори неизвестна, то непосредственно минимизировать функционал (2) невозможно и возникает задача его минимизации на основании выборки экспериментальных значений выхода при различных энергиях  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_1, y_1)$ . Считается, что экспериментальные данные попарно статистически независимы и что каждая пара измерений  $x_i, y_i$  имеет распределение  $P(y, x)$ . В этих предположениях в качестве оценки величины функционала среднего риска можно принять функционал эмпирического риска

$$J_9(z) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\Delta[x_i, z] - y_i)^2 \quad (3)$$

и вместо функционала среднего риска минимизировать функционал эмпирического риска (3). В /7/ показано, что величина среднего риска, которая достигается при этом, зависит от "широты" класса функций, в котором ищется сечение  $z(t)$ . Если класс слишком "широк", то эта величина может сильно отличаться от минимальной. Поэтому поступим следующим образом: будем искать сечение реакции в различных классах функций  $Q_1, Q_2, Q_3$  и т.д. Классы функций построены так, что чем больше номер класса, тем более сложные структуры сечения реакции он может описывать. Однако оптимальная величина среднего риска может не достигаться при минимизации эмпирического риска, так как средний риск, по мере усложнения класса  $Q_i$ , все хуже и хуже оценивается эмпирическим риском /7/. Поэтому будем минимизировать средний риск, выбирая не только функцию из заданного класса, на которой эмпирический риск достига-

от минимума, но и сам класс. В /7,8/ для этого предполагается следующая процедура: минимизация эмпирического риска осуществляется в каждом из  $n$  априори заданных классов  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  и

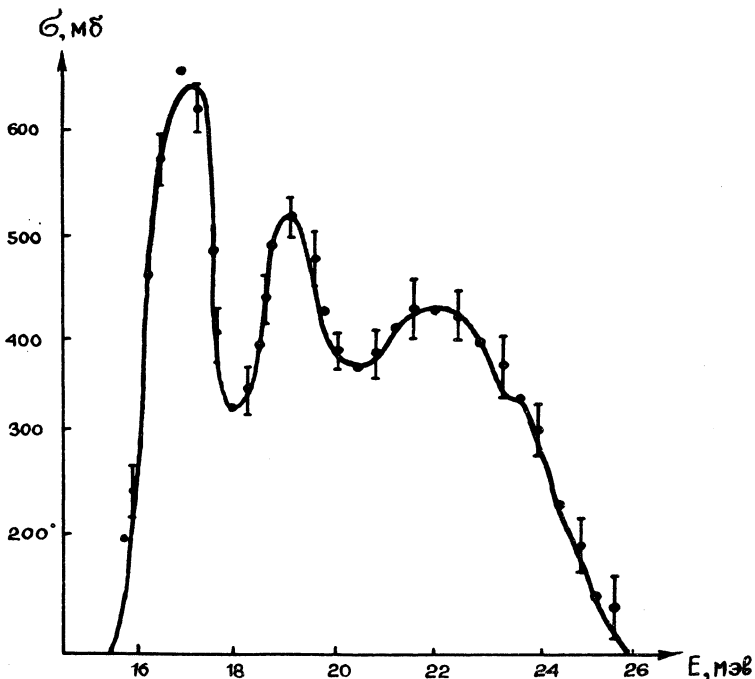


Р и с.1. Сечение реакции, рассчитанное при уровне погрешности кривой выхода 0,2%. Сплошная кривая - модельное сечение. Показаны среднеквадратичные ошибки

получается  $n$  сечений реакции. Среди них за искомое сечение принимается то, на котором достигается наименьшее значение функционала

$$1 - \frac{\min_{z \in \Omega_1} J_3(z)}{\sqrt{m_j \left( \ln \frac{1}{m_j} + 1 \right) - \ln \eta}} \quad (4)$$

Это сечение обладает тем свойством, что оно доставляет гарантированно наименьшую величину функционалу среднего риска по сравнению со всеми прочими полученными сечениями реакции. В (4) через  $\sigma$

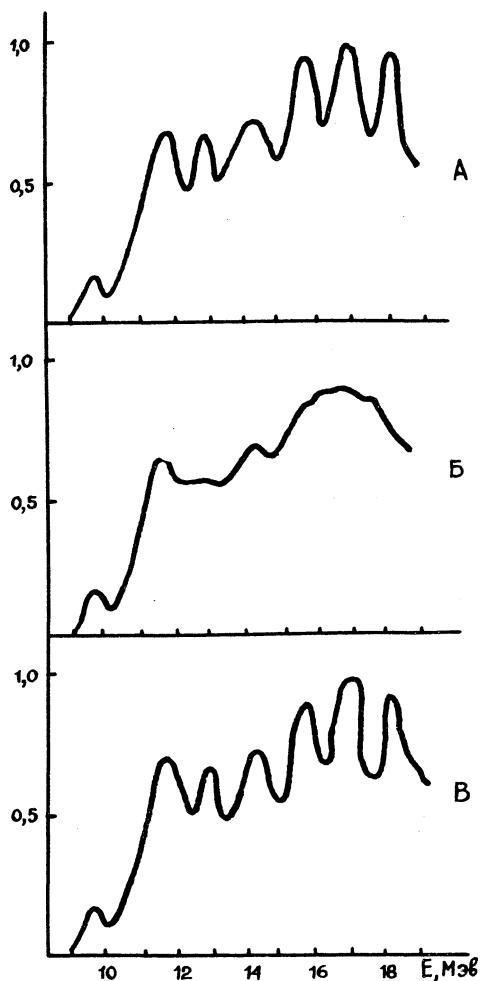


Р и с.2. Сечение реакции, рассчитанное при уровне погрешности кривой выхода 0,3%

обозначено число экспериментальных данных, по которому производится минимизация функционала среднего риска,  $m_j$  - число параметров, от которых зависят функции, принадлежащие классу  $\Omega_1$ ,  $\eta$  - величина, характеризующая надежность получаемого результата (при практических расчетах  $\eta = 0,05$ ).

Для нахождения сечения фотоядерной реакции методом упорядоченной минимизации риска за классы  $\Omega_1$  были приняты классы кусочно-полиномиальных функций, составленных из кусков полиномов 3 степени, называемые сплайнами с  $j$  сопряжениями /9/.

Метод упорядоченной минимизации риска выбирает оптимальное число кусков полиномов, с помощью которых следует представлять решение уравнения (I) по данной выборке объема 1.



Р и с.3. Сравнение сечений, рассчитанных различными методами.

а) Модельное сечение. б) Сечение, полученное по методу регуляризации /6/. в) Сечение, полученное методом минимизации риска

На рисунках 1 и 2 показан результат восстановления сечения реакции по кривой выхода, заданной в 50 точках и искаженной случайным возмущением с дисперсией, соответствующей уровню погрешности 0,3% и 0,2%. Методом упорядоченной минимизации риска в этом случае был построен кубический сплайн с десятью сопряжениями на равномерной сетке. Погрешность получаемого сечения определялась экспериментально. Для этого исходная кривая выхода десять раз искажалась случайным возмущением. По каждой кривой выхода, полученной таким образом, рассчитывалось сечение реакции, а затем вычислялась среднеквадратичная ошибка получаемых сечений.

Для сравнения развитого подхода с другими, методом упорядоченной минимизации риска решалась модельная задача по определению сечения фотоядерной реакции, опубликованная в /6/ (рис.3). Сечение реакции, рассчитанное методом упорядоченной минимизации риска – кубический сплайн с шестнадцатью сопряжениями на равномерной сетке. Уровень погрешности кривой выхода – 0,07% от максимального значения выхода.

Проведенное экспериментальное исследование показывает, что метод упорядоченной минимизации риска позволяет восстанавливать сечение фотоядерных реакций без появления в нем ложных структурных особенностей.

Поступила в редакцию 22 мая 1975 г.

Институт ядерных исследований АН СССР

### Л и т е р а т у р а

1. T. K. Deague, R.J.J. Stewart. Nucl. Phys., A191, 305(1972).
2. A. S. Penfold, J. E. Leiss. Phys. Rev., 114, 1332 (1959).
3. B. C. Cook. Nucl. Instr. Meth., 24, 256 (1963).
4. А. Н. Тихонов. ДАН СССР, 151, 501 (1963).
5. В. Г. Иванченко. Труды ФИАИ, 63, 151 (1972).
6. В. Н. Орлин. Известия АН СССР, серия физическая, 37, П107 (1973).
7. В. Н. Вашик, А. Я. Червоненкис. Автоматика и телемеханика, 8, 21 (1974), 9, 29 (1974).
8. В. Н. Вашик, А. И. Михальский. Автоматика и телемеханика, 10, 86 (1974).
9. Д. Алберг, Э. Нильсон, Д. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. "Мир" М., 1972 г.