Краткие сообщения по физике № 10 1975

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ СВЯЗИ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ

М. Я. Пальчик, Е. С. Фрадкин

УДК 530.145

Разработан метод нахождения размерностей и константы связи Вильсоновских операторов в конформно-инвариантной теории поля. В трехгаммном приближении найдено выражение для константы связи основных полей.

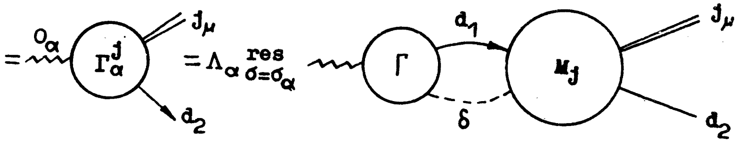
В работах /1-3/ сформулирована программа решения перенормированных /4/ уравнений квантовой теории поля в предположении, что вблизи конуса реализуется строгая конформная симметрия. Одной из главных задач в этом подходе является задача вычисления констант связи и размерностей как исходных полей, так и различных тензорных полей, появляющихся в теории. В первой части настоящей заметки мы найдем размерности и константы связи для тензорных полей алгебры Вильсона, появляющихся в теории при нахождении функций Грина сохраняющихся токов /5/. При этом все величины в конечном итоге выражены через размерности и константы связи исходных полей. Во второй части в "трехгаммном" приближении получено выражение для константы связи исходных полей.

I. Размерности и константы связи алгебры Вильсона для функции Грина токов

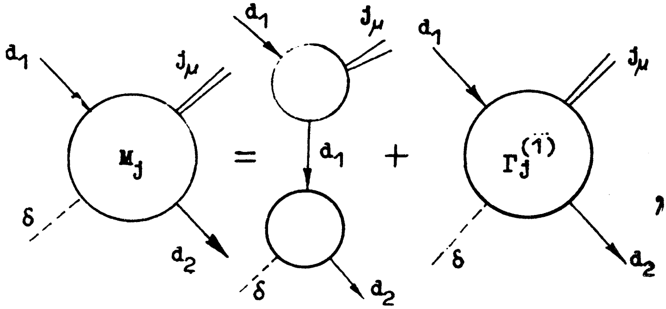
Рассмотрим теорию взаимодействия заряженного скалярного поля φ_α и нейтрального поля χ_δ (взаимодействия $g\varphi^+\varphi\chi$). Продемонстрируем, что размерность и константы связи операторов, входящих в разложение Вильсона произведений $\varphi(x)j_\mu(0)$ и $j_\mu(x)j_\nu(0)$, могут быть вычислены.

В работах /1-3/ показано, что в конформно-инвариантной теории для любого тензорного оператора O_α, дающего вклад в разложение Вильсона, имеет место следующее уравнение для вершины:

$$\Gamma^j_\alpha(x_1x_2x_3) = \langle 0|T(O_\alpha(x_1)\varphi^+_{d_2}(x_2)j_\mu(x_3)|0\rangle =$$



(I)



(2)

где $\qquad \Gamma_{\sigma d_1\delta} = g_{\sigma d_1\delta} C^{\sigma d_1\delta}; \quad g_{d_1d_1\delta} = g; \quad \sigma = (l,s)$

$$C^{\sigma d_1\delta}(x_1x_2x_3) =$$

$$= N_s(d_1\delta l)\Delta_{(d_1+\delta-l+s)/2}(x_{23})\Delta_{(d_1+l-s-\delta)/2}(x_{12})\Delta_{(\delta-d_1+l-s)/2}(x_{13})\times$$

$$\times\left\{\lambda^{x_1}_{\mu_1}(x_2x_3)\ldots\lambda^{x_1}_{\mu_s}(x_2x_3) \ - \text{следы}\right\};$$

$$\lambda^{x_1}_\mu(x_2x_3) = \frac{(x_2-x_1)_\mu}{x^2_{12}} - \frac{(x_3-x_1)_\mu}{x^2_{13}} \qquad (3)$$

$$N_s(d_1\delta l) = 2^s\left\{\Gamma\left(\frac{d_1+\delta+l+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_1+\delta-l+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_1-\delta+l+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta-d_1+l+s}{2}\right)\right.$$

$$\left.\Gamma\left(D-\frac{d_1+\delta+l+s}{2}\right)\Gamma\left(h-\frac{d_1+\delta-l-s}{2}\right)\Gamma\left(h-\frac{d_1-\delta+l-s}{2}\right)\Gamma\left(h-\frac{\delta-d_1+l-s}{2}\right)\right\}^{-1/2}$$

(3a)

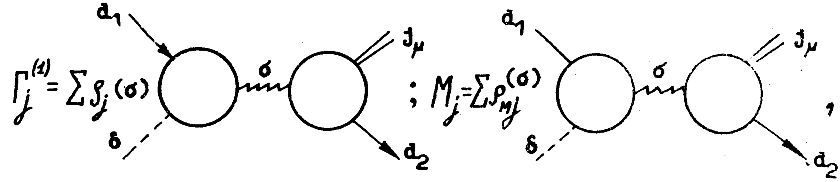
$h = \frac{D}{2}$; D – размерность пространства, $\Delta_d(x) = 4^d(4\pi)^h\Gamma(d)(x^2)^{-d}$,

$$\Gamma_\mu(x_1x_2x_3) = \langle 0|T(\varphi_d(x_1)\varphi_d^+(x_2)j_\mu(x_3)|0\rangle =$$

$$= 2e(4\pi)^h\Gamma(d)\left\{\Gamma(h-1)\Gamma(h-d)\Gamma(d-h+1)\right\}^{-1}\Delta_{(d+2)/2-h}(x_{12})\Delta_{h-1}(x_{13})\times$$

$$\times\Delta_{h-1}(x_{23})\lambda_\mu^{x_3}(x_1x_2). \qquad (4)$$

Вершина $\Gamma_j^{(1)}$ – одночастично-неприводимая часть соответствующей двухчастичной функции Грина (2). Перечислить все операторы O_α, дающие вклад в разложение Вильсона, означает найти те квантовые числа конформной группы $\sigma_\alpha = (l_\alpha;s)$, для которых правая часть (I) имеет полюс. При этом необходимо учесть ограничения на l_α из условия спектральности. $l_\alpha \geqslant D-2+s$ и $l_\alpha > 1$, когда $s = 0$. Чтобы вычислить правую часть (I) надо представить $\Gamma_j^{(1)}$ и M_j, в виде конформного разложения /I-3/



, (5)

где

$$\sum_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} dl\,\mu_s(l), \qquad (6)$$

$$M_s(l) = 2^{(s-2)}(4\pi)^{3h}\frac{\Gamma(s+h)}{\Gamma(s)}(l+s-1)(D-l+s-1)\frac{\Gamma(l-1)\Gamma(D-l+1)}{\Gamma(h-l)\Gamma(l-h)}.$$

Выражение для ρ_j найдено в работе /I/ (см. ф-лу 8.I6). Нам остается найти $\rho(\sigma)$ для первого ("двухгаммного") члена правой части (2). Следуя /I/с помощью обобщенного соотношения Уорда можно показать, что имеют место следующие примечательные соотношения:

$$\rho_{M_j} = \rho_j(D-d_1;\delta;d_2;\sigma), \qquad (7a)$$

$$\rho(\sigma) = \rho_j(D-d;\delta;d_2;\sigma) - \rho_j(d_1;\delta;d_2;\sigma). \qquad (7)$$

Из (7) видно, что замена M_j на $\Gamma_j^{(1)}$ в уравнении (I) корректна лишь для исходных полей. Подставляя (7а) и (5) в (I) и используя соотношения ортогональности /I/ мы найдем правую часть уравнения (I). При этом полюса правой части возникают для представления σ_α со спином s и с размерностью $l_\alpha = d_2+s$ (и для эквивалентного представления). Операторы O_α с этими размерностями и составляют алгебру Вильсона в разложении $\varphi^+_{d_2}(x)j_\mu(0)$. Для вершины (I) имеем ($l_\alpha = d_2 + s$)

$$\Gamma_s^j(x_1x_2x_3) = \langle 0|T(O^s_{\nu_1\ldots\nu_s}(x_1)\varphi^+_{d_2}(x_2)j_\mu(x_3))|0\rangle =$$

$$= N_s^j\left[x_{13}^2x_{23}^2\right]^{(1-h)}(x^2)^{h-d_2-1}\Big\{\lambda_\mu^{x_3}(x_1x_2)\times$$

$$\times\left[\lambda_{\nu}^{x_1}(x_2x_3)\ldots\lambda_{\nu_s}^{x_1}(x_2x_3) - \text{следы}\right] -$$

$$-\frac{1}{D-2}\left[\frac{1}{x_{13}^2}\sum_k g_{\mu\nu_k}(x_{13})\lambda_{\nu_1}^{x_1}(x_2x_3)\ldots\lambda_{\nu_{k-1}}^{x_1}(x_2x_3)\lambda_{\nu_{k+1}}^{x_1}(x_2x_3)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\lambda_{\nu_s}^{x_1}(x_2x_3) - \text{следы}\right]\Big\}$$

$$N_s^j = 2\,\frac{ge}{g(d_2+s,d_1\delta)}\,\mu_s(d_2+s)4^{h+d_2+s}\,(4\pi)^{-5h}\,\frac{\Gamma(d_2+s-h)}{\Gamma(D-d_2)}\,A^{1/2} \qquad (8)$$

$$A=\frac{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2-\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_1+d_2+\delta}{2}-h\right)\Gamma\left(\frac{d_2+\delta-d_1}{2}+s\right)\Gamma\left(h+s-\frac{d_1-d_2+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2-\delta}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{d_1+d_2+\delta}{2}-h+s\right)\Gamma\left(\frac{d_2-d_1+\delta}{2}\right)\Gamma\left(h-\frac{d_1-d_2+\delta}{2}\right)} \qquad (9)$$

Константа связи $g_{(d_2+s,d,\delta)}$ вершины $\langle 0|T(O_{d_2+s}\varphi^+_{d_1}\chi\delta)|0\rangle$ связана с основной константой связи соотношением

$$g_{(d_2+s;d_1;\delta)} = gA^{1/2}. \qquad (10)$$

Аналогичное исследование алгебры Вильсона двух токов $j_\mu(x)j_\mu(0)$ приводит к операторам O_α со спином s и с размерностью $l_2 = 2 + s$. В частности при $s = 0$ вершина $\Gamma_{\mu\nu} = \langle 0|T(j_\mu(z_1)j_\nu(z_2))O_2(x)|0\rangle$

равна

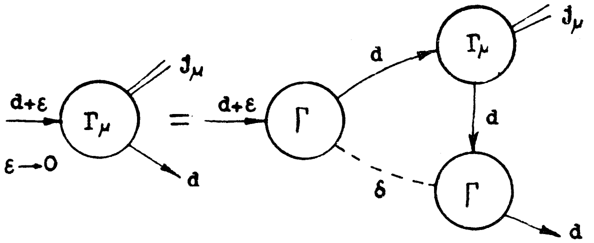
$$\Gamma_{\mu\nu}(z_1 z_2 x) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{2D}}\, 4^{3h-1}\, \Lambda_2 \Gamma(h-1)\, \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(h-d)} \left\{ \frac{\Gamma(h-d+1)\Gamma(D-d-1)}{\Gamma(d-h+1)\Gamma(d-1)} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \lambda_\mu^{z_1}(xz_2)\, \lambda_\nu^{z_2}(xz_1) + \frac{1}{D-2}\, \frac{1}{z_{12}^2}\, g_{\mu\nu}(z_{12}) \right\} \left[(z_1-x)^2 (z_2-x)^2 z_{12}^2 \right]^{1-h}$$

(II)

II. Характеристики исходных полей в "трехгаммном" приближении

Развитая здесь методика также пригодна и для нахождения характеристик исходных полей. Рассмотрим, в частности, уравнение в "трехгаммном" приближении для вершины взаимодействия исходного заряженного поля φ_d с током j_μ



(I2)

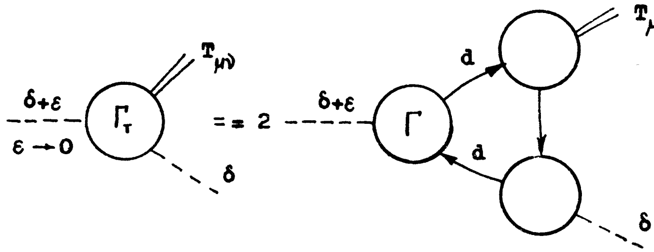
В правую часть (I2) входит "двухгаммный" блок правой части (2) и его спектральная плотность $\rho(\sigma)$ определяется формулой (7). Используя (7), (5) и соотношение ортогональности мы получим из (2) следующее выражение для константы основного взаимодействия

$$\varepsilon^2 = 4\mu_0(d) N_0^{-1}(dd\delta) \times$$

$$\times \left\{ \Psi\left(d - h + \frac{\delta}{2}\right) + \Psi\left(d - \frac{\delta}{2}\right) + \Psi\left(D - d - \frac{\delta}{2}\right) - 2\left[\Psi\left(\frac{\delta}{2}\right) + \Psi\left(h - \frac{\delta}{2}\right)\right]\right\}^{-1},$$

(I3)

где $\Psi(x) = \frac{d}{dx}\Gamma(x)$, μ_0 и N_0 определяются формулами (6) и (3а). Добавочную связь на константу и размерности исходных полей мы получим из уравнения для вершины взаимодействия нейтрального поля с тензором энергии - импульса $T_{\mu\nu}$. Это уравнение имеет вид:



(I4)

Взяв дивергенцию по аргументу $T_{\mu\nu}$ и воспользовавшись соотношением Уорда, удается вычислить /I/ правую и левую часть (I4). В результате получаем следующее соотношение:

$$g\left[\rho_T(D-d,D-d,\delta+\varepsilon,\delta) - \rho_T(d,d,\delta+\varepsilon,\delta)\right]\Big|_{\varepsilon\to 0} =$$

$$= \frac{4}{D-1}(4\pi)^h\left[\Gamma(h+1)\Gamma(h+1-\delta)\Gamma(\delta-h)\right]^{-1}, \qquad (I5)$$

где ρ_T определяется формулой (8.33) работы /I/. Из (I5) имеем:

$$g^2 = 2\mu_0(\delta)N^{-1}(dd\delta)\left\{\frac{2}{h}\,\frac{(h-d)(h-\delta)}{\delta(D-\delta)} + \frac{1}{2}\left[\Psi\left(d-h+\frac{\delta}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Psi\left(D-d-\frac{\delta}{2}\right) - \Psi\left(d-\frac{\delta}{2}\right) - \Psi\left(h-d+\frac{\delta}{2}\right)\right]\right\}^{-1}. \qquad (I6)$$

Таким образом на три характеристики исходных полей мы получим два соотношения (I3) и (I6). Недостающую связь между размерностями и константой связи можно получить из уравнений для основной вершины. Примечательно, что из уравнений (I3) и (I6) следует обращение в нуль g при нормальных размерностях основных полей.

Поступила в редакцию
4 июля I975 г.

Л и т е р а т у р а

1. E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik. Preprint N 115, Physical Lebedev Institute, Moscow, 1974; Nucl. Phys. (в печати).
2. G. Mack. Prpeint Univ. Bern, 1973.
3. М. Я. Пальчик, Е. С. Фрадкин. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 4, 35 (1974); препринт № 18 Института автоматики и электрометрии, Новосибирск, 1974 г.; 17 Международной школы по физике, Сухуми 1974 г.
4. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 26, 751 (1954); 29, 121 (1955). Труды ФИАН, 26, 17 (1965).
5. E. S. Fradkin. M. Ya. Palchik. B. H. Zaikin. Phys. Lett., (в печати).