Краткие сообщения по физике № 10 1975

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА С ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ

Д. М. Штейнградт

УДК 536.764

С использованием нового метода исследования решеточных моделей точно вычислена статсумма одномерной модели Изинга с дальнодействием. Предлагаемый метод основан на использовании континиуального интегрирования по грассмановским переменным.

Рассмотрим цепочку спинов. Пусть задан гамильтониан взаимодействия спинов

$$H = \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{N} \sigma_j\sigma_{j+1} + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^{N} \sigma_j\sigma_{j+m} + \varepsilon_3 \sum_{j=1}^{N} \sigma_j\sigma_{j+m+1} \quad (\sigma_{j+N} = \sigma_j).$$

Статсумма такой цепочки

$$Z = \left(\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_3}{\theta}\right)^N 2^{-N} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{j=1}^{N} \left[(1 - x\sigma_j\sigma_{j+1})\times\right.$$
$$\left.\times(1 - y\sigma_j\sigma_{j+m})(1 - q\sigma_j\sigma_{j+m+1})\right] \qquad (\sigma_j = \pm 1), \qquad (1)$$

где θ – температура,

$$x = \operatorname{th}\frac{\varepsilon_1}{\theta};\ y = \operatorname{th}\frac{\varepsilon_2}{\theta};\ q = \operatorname{th}\frac{\varepsilon_3}{\theta}. \qquad (1.1)$$

Используя грассмановские переменные, (1) можно представить следующим образом:

$$Z = \left(0{,}5\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_3}{\theta}\right)^N_{\{u\}\to 0} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{j=N}^{1} \left[(1 - x\delta_{1,j+1}\delta_{4,j})\times\right.$$
$$\left.\times(1 - q\tau_3\tau_1\delta_{5,j+m+1}\delta_{3,j})(1 - y\tau_3\tau_1\delta_{6,j+m}\delta_{2,j})\right] \prod_{j=1}^{N} \left[(1 + \tau_1 u_{2,j}\sigma_j)\times\right.$$
$$\times(1+\tau_3 u_{6,j+m}\sigma_{j+m})(1+\tau_1 u_{3,j}\sigma_j)(1+\tau_3 u_{5,j+m+1}\sigma_{j+m+1})(1+\tau_1 u_{4,j}\sigma_j)\times$$
$$\left.\times(1+\tau_1 u_{1,j+1}\sigma_{j+1})\right], \qquad (2)$$

где $u_{k,j}$ – грассмановские переменные, τ_1; τ_3 – матрицы Паули,

$$\delta_{k,j} \equiv \frac{\delta}{\delta u_{k,j}}.$$

Действительно, благодаря обратному порядку членов в первом упорядоченном произведении в (2) свертка произведений в (2) выполняется элементарно, давая в результате (I). Используя в (2) коммутацию $\tau_1 u_{k,j}$ с $\tau_3 u_{r,j}$ и тождество

$$\prod_{j=1}^{N}(1+\alpha_j u_j)\prod_{j=1}^{N}(1+\beta_j v_j) = 2^{-2}\sum_{s_1;s_2=\pm 1}\Big[(1+s_1+s_2-s_1 s_2)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{N}(1+s_1\beta_j v_j)\prod_{j=1}^{N}(1+s_2\alpha_j u_j)\Big],$$

получаем:

$$Z = \left(\mathrm{ch}\,\frac{\varepsilon_1}{\theta}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varepsilon_2}{\theta}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varepsilon_3}{\theta}\right)^N \exp\sum_{j=1}^{N}(-x\delta_{1,j+1}\delta_{4,j} - q\tau_3\tau_1\delta_{5,j+m+1}\delta_{3,j} -$$
$${\scriptstyle \{u\}\to 0}$$
$$- y\tau_3\tau_1\delta_{6,j+m}\delta_{2,j})2^{-4}\sum_{s_1;s_2;s_3;s_4=\pm 1}\Big\{(1+s_1+s_2-s_1 s_2)(1+s_3+s_4-s_3 s_4)\times$$
$$\times 2^{-N}\sum_{\{\sigma\}}\Big[(1+\tau_1 s_2 u_{1,N+1}\sigma_1)(1+\tau_1 s_1 u_{2,1}\sigma_1)(1+\tau_1 s_1 u_{3,1}\sigma_1)(1+\tau_1 s_1 u_{4,1}\sigma_1)\times$$
$$\times(1+\tau_3 s_4 u_{5,N+1}\sigma_1)(1+\tau_3 s_4 u_{6,N+1}\sigma_1)\Big]\prod_{j=2}^{m}\Big[(1+\tau_1 s_1 u_{1,j}\sigma_j)(1+\tau_1 s_1 u_{2,j}\sigma_j)\times$$
$$\times(1+\tau_1 s_1 u_{3,j}\sigma_j)(1+\tau_1 s_1 u_{4,j}\sigma_j)(1+\tau_3 s_4 u_{5,N+j}\sigma_j)(1+\tau_3 s_4 u_{6,N+j}\sigma_j)\Big]\times$$
$$\times\Big[(1+\tau_1 s_1 u_{1,m+1}\sigma_{m+1})(1+\tau_1 s_1 u_{2,m+1}\sigma_{m+1})(1+\tau_1 s_1 u_{3,m+1}\sigma_{m+1})\times$$
$$\times(1+\tau_1 s_1 u_{4,m+1}\sigma_{m+1})(1+\tau_3 s_4 u_{5,N+m+1}\sigma_{m+1})(1+\tau_3 s_3 u_{6,m+1}\sigma_{m+1})\Big]\times$$
$$\times\prod_{j=m+2}^{N}\Big[(1+\tau_1 s_1 u_{1,j}\sigma_j)(1+\tau_1 s_1 u_{2,j}\sigma_j)(1+\tau_1 s_1 u_{3,j}\sigma_j)(1+\tau_1 s_1 u_{4,j}\sigma_j)\times$$
$$\times(1+\tau_3 s_3 u_{5,j}\sigma_j)(1+\tau_3 s_3 u_{6,j}\sigma_j)\Big]\Big\}. \qquad (3)$$

Выполним в (3) суммирование по σ:

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \left(\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_3}{\theta}\right)^N \exp\sum_{j=1}^{N}(-x\delta_{1,j+1}\delta_{4,j} - q\tau_3\tau_1\underset{\{u\}\to 0}{\delta_{5,j+m+1}}\delta_{3,j} - \\
& - y\tau_3\tau_1\delta_{6,j+m}\delta_{2,j})2^{-4}\sum_{s_1;s_2;s_3;s_4=\pm 1}\Big\{(1+s_1+s_2-s_1s_2)(1+s_3+s_4-s_3s_4)\times \\
& \times\exp\Big\{\Big[u_{1,N+1}s_2s_1(u_{2,1}+u_{3,1}+u_{4,1})+s_2s_4\tau_1\tau_3u_{1,N+1}(u_{5,N+1}+u_{6,N+1})+ \\
& +u_{2,1}(u_{3,1}+u_{4,1})+u_{3,1}u_{4,1}+s_1s_4\tau_1\tau_3(u_{2,1}+u_{3,1}+u_{4,1})(u_{5,N+1}+u_{6,N+1})+ \\
& +u_{5,N+1}u_{6,N+1}\Big]+\sum_{j=2}^{m}\Big[u_{1,j}(u_{2,j}+u_{3,j}+u_{4,j})+u_{2,j}(u_{3,j}+u_{4,j})+u_{3,j}u_{4,j}+ \\
& +\tau_2\tau_3s_1s_4(u_{1,j}+u_{2,j}+u_{3,j}+u_{4,j})(u_{5,N+j}+u_{6,N+j})+u_{5,N+j}u_{6,N+j}\Big]+ \\
& +\Big[u_{1,m+1}(u_{2,m+1}+u_{3,m+1}+u_{4,m+1})+u_{2,m+1}(u_{3,m+1}+u_{4,m+1})+u_{3,m+1}u_{4,m+1}+ \\
& +s_1s_4\tau_1\tau_3(u_{1,m+1}+u_{2,m+1}+u_{3,m+1}+u_{4,m+1})u_{5,m+N+1}+s_1s_3\tau_1\tau_3(u_{1,m+1}+ \\
& +u_{2,m+1}+u_{3,m+1}+u_{4,m+1})u_{6,m+1}+s_4s_3u_{5,N+m+1}u_{6,m+1}\Big]+\sum_{j=m+2}^{N}\times \\
& \times\Big[u_{1,j}(u_{2,j}+u_{3,j}+u_{4,j})+u_{2,j}(u_{3,j}+u_{4,j})+u_{3,j}u_{4,j}+s_1s_3\tau_1\tau_3\times \\
& \times(u_{1,j}+u_{2,j}+u_{3,j}+u_{4,j})(u_{5,j}+u_{6,j})+u_{5,j}u_{6,j}\Big]\Big\}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Делая в (4) замену переменных

$$u_{k,j}\to u_{k,j},\quad \delta_{k,j}\to\delta_{k,j},\quad k = 1,2,3,4.$$

$$s_1s_3\tau_1\tau_3u_{r,j}\to u_{r,j},\quad s_1s_3\tau_3\tau_1\delta_{r,j}\to\delta_{r,j},\quad r = 5,6,$$

$$s_2 = \alpha_1s_1,\quad s_3 = \alpha_2s_1,\quad s_4 = \alpha_2\alpha_3s_1,$$

где $\alpha_k = \pm 1$, получаем:

$$Z = \left(\mathrm{ch}\,\frac{\varepsilon_1}{\theta}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varepsilon_2}{\theta}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varepsilon_3}{\theta}\right)^N 2^{-2} \sum_{\alpha_1;\alpha_2=\pm 1} \left[(1-\alpha_1)+\alpha_2(1+\alpha_1)\right] Z(\alpha_1;\alpha_2), \tag{5}$$

где

$$Z(\alpha_1;\alpha_2) = \exp \sum_{j=1}^{N} (-x\delta_{1,j+1}\delta_{4,j} - q\alpha_2\delta_{5,j+m+1}\delta_{3,j} - y\alpha_2\delta_{6,j+m}\delta_{2,j})_{\{u\}\to 0} \times$$

$$\times \exp\Big\{\Big[\alpha_1 u_{1,N+1}(u_{2,1}+u_{3,1}+u_{4,1})+u_{1,N+1}(u_{5,N+1}+u_{6,N+1})+u_{2,1}(u_{3,1}+$$

$$+u_{4,1})+u_{3,1}u_{4,1}+\alpha_1(u_{2,1}+u_{3,1}+u_{4,1})(u_{5,N+1}+u_{6,N+1})-u_{5,N+1}u_{6,N+1}\Big]+$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\Big[u_{1,j}(u_{2,j}+u_{3,j}+u_{4,j})+u_{2,j}(u_{3,j}+u_{4,j})+u_{3,j}u_{4,j}+\alpha_1(u_{1,j}+u_{2,j}+$$

$$+u_{3,j}+u_{4,j})(u_{5,N+j}+u_{6,N+j})-u_{5,N+j}u_{6,N+j}\Big]+\Big[u_{1,m+1}(u_{2,m+1}+u_{3,m+1}+$$

$$+u_{4,m+1})+u_{2,m+1}(u_{3,m+1}+u_{4,m+1})+u_{3,m+1}u_{4,m+1}+\alpha_1(u_{1,m+1}+u_{2,m+1}+$$

$$+u_{3,m+1}+u_{4,m+1})u_{5,N+m+1}+(u_{1,m+1}+u_{2,m+1}+u_{3,m+1}+u_{4,m+1})u_{6,m+1}-$$

$$-\alpha_1 u_{5,N+m+1}u_{6,m+1}\Big]+\sum_{j=m+2}^{N}\Big[u_{1,j}(u_{2,j}+u_{3,j}+u_{4,j}+u_{5,j}+u_{6,j})+u_{2,j}\times$$

$$\times(u_{3,j}+u_{4,j}+u_{5,j}+u_{6,j})+u_{3,j}(u_{4,j}+u_{5,j}+u_{6,j})+u_{4,j}(u_{5,j}+u_{6,j})-$$

$$-u_{5,j}u_{6,j}\Big]\Big\} \tag{5.I}$$

Пусть

$$\alpha u_{r,N+j} = u_{r,j},$$

Тогда ($I^2 = -1$):

$$u_{r,j} = N^{-0,5}\sum_{k=1}^{N}\exp\left[\frac{2\pi I}{N}\left(j+\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(k+\frac{\alpha-1}{4}\right)\right]\tilde{u}_{r,k}$$

$$\tilde{u}_{r,k} = N^{-0,5}\sum_{j=1}^{N}\exp\left[-\frac{2\pi I}{N}\left(j+\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(k+\frac{\alpha-1}{4}\right)\right]u_{r,j}$$

$$\delta_{r,j} = N^{-0,5} \sum_{k=1}^{N} \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}\left(j + \frac{\alpha-1}{4}\right)\left(k + \frac{\alpha-1}{4}\right)\right]\tilde{\delta}_{r,k}$$

$$\tilde{\delta}_{r,k} = N^{-0,5} \sum_{j=1}^{N} \exp\left[\frac{2\pi i}{N}\left(j + \frac{\alpha-1}{4}\right)\left(k + \frac{\alpha-1}{4}\right)\right]\delta_{r,j}\,. \qquad (6)$$

Вычисляя (5.I) для обоих значений α_1 с учетом (6) и (I.I), получаем

$$Z = 0,5 \sum_{\alpha=\pm 1} \left\{ \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_3}{\theta} - \right.\right.\right.$$

$$- \operatorname{sh}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_3}{\theta} + \operatorname{sh}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\cos\frac{2\pi k}{N} - \alpha\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\cos\frac{2\pi mk}{N} -$$

$$\left.\left. - \alpha\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_3}{\theta}\cos\frac{2\pi(m+1)k}{N}\right)\right] + \alpha\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\times\right.\right.$$

$$\times\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_3}{\theta} - \operatorname{sh}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_3}{\theta} + \operatorname{sh}\frac{\varepsilon_1}{\theta}\cos\frac{2\pi(k-0,5)}{N} - \alpha\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_2}{\theta}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\cos\frac{2\pi m(k-0,5)}{N} - \alpha\operatorname{sh}\frac{\varepsilon_3}{\theta}\cos\frac{2\pi(m+1)(k-0,5)}{N}\right)\right]\right\}. \qquad (7)$$

Выражение (7) является искомым. Более подробное изложение как самой задачи так и предлагаемого метода можно найти в работе /I/. Общая теория грассмановских переменных дана в работе /2/.

В заключение хочу выразить свою признательность и благодарность моему научному руководителю Е. С. Фрадкину.

Поступила в редакцию
14 июля 1975 г.

Литература

I. Е. С. Фрадкин, Д. М. Штейнградт. Препринт ФИАН № 90, 1975 г.
2. Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования, "Наука", М., 1968 г.