Краткие сообщения по физике № 1 1974

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ В СРЕДЕ С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. В. Степанов, А. В. Шелагин[ж)]

УДК 539.I25.523.5

Получена поправка к коэффициенту поглощения ультрахолодных нейтронов в ловушке за счет малых шероховатостей стенок. Рассмотренный эффект не объясняет имеющиеся экспериментальные данные.

Как известно, время жизни ультрахолодных нейтронов (УХН) в накопительном сосуде определяется, главным образом, их поглощением (точнее, их поглощением и нагревом) в стенках ловушки /I,2/. Приведенное в этих работах значение коэффициента поглощения нейтронов соответствует случаю, когда стенки ловушки идеально гладкие

$$\alpha_0 = \left(\frac{u}{v_{\text{гр}}}\right)^2 \frac{2\cos\theta}{\sqrt{(v_{\text{гр}}/v)^2 - \cos^2\theta}}. \qquad (I)$$

Здесь θ - угол падения плоской монохроматической волны на границу раздела сред, $u^2 = (\hbar/m)Nv\sigma_a(v)$, где σ_a - эффективное сечение увода УХН вследствие поглощения и нагрева, N - число ядер в I см^3 стенки ловушки, v - скорость нейтронов. $v_{\text{гр}} = 2(\hbar/m)\sqrt{\pi N b}$, b - когерентная длина рассеяния УХН.

В реальных ситуациях стенки ловушки шероховатые, и представляет интерес исследовать вопрос о влиянии неидеальности поверхности на поглощение УХН. Ранее одним из авторов /3/ был вычислен коэффициент поглощения УХН в том случае, когда поверхность ловушки содержала редко расставленные некоррелированные примеси малого размера (по сравнению с длиной волны нейтрона λ_n). Игнатович /4/ в рамках теории возмущений получил выражение для коэффициента поглощения нейтронов, когда отклонение поверхности ловушки от

ж) Московский физико-технический институт.

идеально гладкой можно описать с помощью некоторой случайной функции $\zeta(x,y)$ т.е. граница раздела сред задана в виде

$$z = \zeta(x,y). \tag{2}$$

К сожалению, при расчете им была допущена погрешность, и приведенное в работе /4/ выражение для коэффициента поглощения УХН некорректно. В настоящей заметке мы рассмотрим ту же задачу с помощью специальной формы теории возмущений, удобной при учете возмущения граничных условий /5,6/. Для упрощения выкладок положим $\langle\zeta\rangle = 0$. Символ $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю неоднородных участков поверхности. Тогда идеально гладкая граница раздела, очевидно, совпадает с плоскостью $z = 0$ (ось oz для определенности будем полагать направленной внутрь ловушки).

По определению α – коэффициент поглощения есть отношение потока $J_z^{(-)} = J_z^{пад} + \langle J_z^{отр}\rangle$ к падающему потоку $J_z^{пад}$ т.е.

$$\alpha = J_z^{(-)}/J_z^{пад}, \tag{3}$$

$\langle J_z^{отр}\rangle$ – средний отраженный поток нейтронов. Если волновая функция падающих на поверхность нейтронов представляет собой плоскую волну

$$\Psi_{пад}(r) = A\exp(ik_{Ix}x + ik_{Iy}y - ik_I z\cos\theta), \tag{4}$$

где A – нормировочный множитель и $\bar{k}_I = (k_{Ix}, k_{Iy}, k_{Iz} = k_I\cos\theta)$ – волновой вектор падающей волны, то, как нетрудно проверить,

$$J_z^{пад} = -\frac{\hbar k_I}{m}\cos\theta\,|A|^2 Q, \tag{5}$$

Q – площадь облучаемой подстилающей плоской поверхности. Выражение для потока $J_z^{отр}$ удобно преобразовать следующим образом. Подставим в известное квантовомеханическое выражение

$$J_z^{отр} = \frac{i\hbar}{2m}\iint_Q dxdy\left[\Psi_I^{отр}(\bar{r})\frac{d}{dz}\Psi_I^{отр*}(\bar{r}) - \Psi_I^{отр*}(\bar{r})\frac{d}{dz}\Psi_I^{отр}(\bar{r})\right] \tag{6}$$

разложение отраженной волны $\Psi_I^{отр}(\bar{r})$ по плоским волнам

$$\Psi_I^{отр}(\bar{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa_x d\varkappa_y u_I(\varkappa_x,\varkappa_y)\exp\left[i(\varkappa_x x + \varkappa_y y + z\sqrt{k_I^2 - \varkappa_x^2 - \varkappa_y^2})\right] \tag{7}$$

$z > 0$

После выполнения интегрирования получаем [ж)]

$$J_z^{отр} = \frac{\hbar}{m}\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{æ_x^2+æ_y^2\leq k_I^2} dæ_x dæ_y \sqrt{k_I^2 - æ_x^2 - æ_y^2}\,\left|u_I(æ_x,æ_y)\right|^2. \quad (8)$$

Таким образом задача о нахождении потока $J_z^{отр}$ сведена к отысканию фурье-компонент отраженной волны $u_I(æ_x,æ_y)$. Эти величины могут быть найдены в случае малых и пологих неоднородностей границы, когда $\langle|\zeta|^m\rangle\ll\lambda_n^m$, $\langle|\nabla\zeta|^m\rangle\ll 1$ из стандартных условий непрерывности волновой функции Ψ и ее нормальной производной $\partial\Psi/\partial N$ на границе раздела сред

$$\Psi_I(\vec r)\big|_{z=\zeta(x,y)} = \Psi_{II}(\vec r)\big|_{z=\zeta(x,y)}, \quad (9)$$

$$\left.\frac{\partial\Psi_I(\vec r)}{\partial N}\right|_{z=\zeta(x,y)} = \left.\frac{\partial\Psi_{II}(\vec r)}{\partial N}\right|_{z=\zeta(x,y)}. \quad (10)$$

Индекс I относится к вакууму, а индекс II – к стенке ловушки. Нейтронное поле $\Psi_I(r)$ представляет собой сумму падающей волны $\Psi_{пад}(\vec r)$ и отраженной волны $\Psi_I^{отр}(r)$.

Будем искать выражение для нейтронного поля в i-ой среде $\Psi_i(\vec r)$ в виде ряда по возрастающим степеням $|\zeta|$ и $|\nabla\zeta|$ /4,5/

$$\Psi_i(\vec r) = \Psi_i^{(0)}(\vec r) + \Psi_i^{(1)}(\vec r) + \Psi_i^{(2)}(\vec r) + \ldots \quad (11)$$

Здесь $\Psi_i^{(0)}(\vec r)$ описывает распределение нейтронов в ловушке (внутри и в стенках) с гладкой границей раздела, $\Psi_i^{(1)}(\vec r)$ представляет собой поправку первого порядка за счет неоднородностей и т.д.

Подставим разложение (11) в граничные условия (9) – (10) и выделим слагаемые одного порядка малости. В результате получим граничные условия для функций $\Psi_i^{(n)}(\vec r)$. А именно, <u>нулевое приближение</u>

$$\Psi_I^{(0)}(\vec r)\big|_{z=0} = \Psi_{II}^{(0)}(\vec r)\big|_{z=0}, \quad (12)$$

ж) При интегрировании мы полагаем площадь поверхности Q достаточно большой, чтобы можно было распространить пределы интегрирования по x и y до бесконечности.

$$\left.\frac{\partial\Psi_{I}^{(0)}(\vec{r})}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\Psi_{II}^{(0)}(\vec{r})}{\partial z}\right|_{z=0}. \tag{13}$$

Первое приближение

$$\left.\Psi_{I}^{(1)}(\vec{r})\right|_{z=0} = \left.\Psi_{II}^{(1)}(\vec{r})\right|_{z=0}, \tag{14}$$

$$\left[\frac{\partial\Psi_{I}^{(1)}(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_{II}^{(1)}(\vec{r})}{\partial z}\right]_{z=0} =$$

$$= \zeta(x,y)\left.\Psi_{I}^{(0)}(\vec{r})\right|_{z=0} k_{I}^{2}\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^{2}\left[1 - i\left(\frac{u}{v_{гр}}\right)^{2}\right]. \tag{15}$$

Второе приближение

$$\left[\Psi_{I}^{(2)}(\vec{r}) - \Psi_{II}^{(2)}(\vec{r})\right]_{z=0} =$$

$$= -\frac{\zeta^{2}(x,y)}{2}\left[\frac{\partial^{2}\Psi_{I}^{(0)}(\vec{r})}{\partial z^{2}} - \frac{\partial^{2}\Psi_{II}^{(0)}(\vec{r})}{\partial z^{2}}\right]_{z=0} - \zeta(x,y)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial\Psi_{I}^{(1)}(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_{II}^{(1)}(\vec{r})}{\partial z}\right]_{z=0}, \tag{16}$$

$$\left[\frac{\partial\Psi_{I}^{(2)}(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_{II}^{(2)}(\vec{r})}{\partial z}\right]_{z=0} = -\frac{\zeta^{2}(x,y)}{2}\left[\frac{\partial^{3}\Psi_{I}^{(0)}(\vec{r})}{\partial z^{3}} - \frac{\partial^{3}\Psi_{II}^{(0)}(\vec{r})}{\partial z^{3}}\right]_{z=0} -$$

$$- \zeta(x,y)\left[\frac{\partial^{2}\Psi_{I}^{(1)}(\vec{r})}{\partial z^{2}} - \frac{\partial^{2}\Psi_{II}^{(1)}(\vec{r})}{\partial z^{2}}\right]_{z=0} \tag{17}$$

и т.д.

Таким образом граничные условия на шероховатой поверхности удается преобразовать к условиям на гладкой поверхности, содержащей поверхностные источники нейтронного поля. Эти соотношения после преобразования их по Фурье относительно x и y позволяют найти фурье-компоненты $u_{1,2}^{(n)}(\varkappa_x,\varkappa_y)$. В частности, для отыскания $J_z^{отр}$ с точностью до $|\zeta|^2$ достаточно найти $u_I^{(0)отр}(\varkappa_x,\varkappa_y)$, $u_I^{(1)отр}(\varkappa_x,\varkappa_y)$ и $u_I^{(2)отр}(\varkappa_x,\varkappa_y)$. Приведем результаты вычислений.

<u>Нулевое приближение</u>

$$u_I^{(0)отр}(\varkappa_x,\varkappa_y) = (2\pi)^2 A V(\theta)\delta(k_{Ix} - \varkappa_x)\delta(k_{Iy} - \varkappa_y), \qquad (18)$$

где $V(\theta) = (k_{Iz} - k_{IIz})/(k_{Iz} + k_{IIz})$ – коэффициент отражения (по амплитуде) нейтронной волны от плоской границы раздела сред.

<u>Первое приближение</u>

$$u_I^{(1)отр}(\varkappa_x,\varkappa_y) = -iA[1 + V(\theta)]\left[\sqrt{k_I^2 - \varkappa_x^2 - \varkappa_y^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{k_{II}^2 - \varkappa_x^2 - \varkappa_y^2}\right]\tilde{\zeta}(\varkappa_x - k_{Ix}, \varkappa_y - k_{Iy}). \qquad (19)$$

Здесь

$$\tilde{\zeta}(\varkappa_x,\varkappa_y) = \iint dxdy \exp\left[-i\varkappa_x x - i\varkappa_y y\right]\zeta(x,y).$$

<u>Второе приближение</u>

$$u_I^{(2)отр}(\varkappa_x,\varkappa_y) = -\frac{1}{2}A[1 + V(\theta)]\left[\sqrt{k_I^2 - \varkappa_x^2 - \varkappa_y^2} - \sqrt{k_{II}^2 - \varkappa_x^2 - \varkappa_y^2}\right]\times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} dq_x dq_y \tilde{\zeta}(q_x,q_y)\tilde{\zeta}(\varkappa_x - k_{Ix} - q_x, \varkappa_y - k_{Iy} - q_y)\times$$

$$\times\left\{\sqrt{k_{II}^2 - \varkappa_x^2 - \varkappa_y^2} + \sqrt{k_I^2 - k_{Ix}^2 - k_{Iy}^2} + 2\left[\sqrt{k_I^2 - (\varkappa_x - q_x)^2 - (\varkappa_y - q_y)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{k_{II}^2 - (\varkappa_x - q_x)^2 - (\varkappa_y - q_y)^2}\right]\right\}. \qquad (20)$$

Эти выражения вместе с формулами (3), (5) и (8) после усреднения $J_z^{отр}$ позволяют найти коэффициент поглощения α.[ж)] Он имеет вид

ж) В соответствующей формуле работы /4/ опущена часть последнего слагаемого в фигурных скобках в (20).

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + 2k_I \sqrt{\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 - \cos^2\theta}\, \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{p_x^2+p_y^2 \le k_I^2} dp_x dp_y w_{\zeta\zeta}(p_x - k_{Ix}, p_y - k_{Iy}) \times \right.$$

$$\times \left[\frac{k_I^2 - p_x^2 - p_y^2}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + k_I^2 \left[\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 - 1\right]}} - \frac{\sqrt{k_I^2 - p_x^2 - p_y^2}\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 - \cos^2\theta}} \right] +$$

$$+ k_I^2 \left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_x dp_y w_{\zeta\zeta}(p_x - k_{Ix}, p_y - k_{Iy}) \times$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{k_I \sqrt{\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 - \cos^2\theta}}{\sqrt{\left[\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 - 1\right] k_I^2 + p_x^2 + p_y^2}} \right] \right\}. \qquad (2I)$$

Здесь

$$w_{\zeta\zeta}(\varkappa_x, \varkappa_y) = \frac{1}{Q} \left\langle |\xi(\varkappa_x, \varkappa_y)|^2 \right\rangle. \qquad (22)$$

При $\zeta(x,y) \equiv const = c$, $w_{\zeta\zeta}(\varkappa_x, \varkappa_y) = (2\pi)^2 c^2 \delta(\varkappa_x)\delta(\varkappa_y)$ и выражение в фигурных скобках в (2I), как и следовало ожидать, обращается в единицу.

Дальнейшее упрощение выражения для α возможно, если сделать некоторые предположения о статистических свойствах случайной функции $\zeta(x,y)$. Будем полагать, что эта функция имеет гауссову корреляционную функцию

$$\langle \zeta(x,y)\zeta(x',y') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_x dp_y w_{\zeta\zeta}(p_x, p_y) \exp\left[ip_x x + ip_y y\right] =$$

$$= \langle \zeta^2 \rangle \exp\left\{ -\frac{1}{l^2}\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right] \right\}. \qquad (23)$$

Если длина корреляции l неоднородностей границы мала по сравнению с длиной волны нейтрона, то с точностью до членов, линейных по 1, имеем

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 + k_{гр}^2 \langle \xi^2 \rangle \left[1 - k_I l \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\left(\frac{v_{гр}}{v}\right)^2 - \cos^2\theta} \right] \right] \qquad (24)$$

$$k_{гр} = k_I v_{гр}/v$$

После усреднения по изотропному угловому распределению падающих нейтронов это выражение принимает вид

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 \left[1 + k_{гр}^2 \langle \xi^2 \rangle \right] - \left(\frac{u}{v_{гр}}\right)^2 k_{гр}^2 \langle \xi^2 \rangle k_I l \frac{2\sqrt{\pi}}{3}. \qquad (25)^*$$

В случае гладкой границы, как известно /I/

$$\overline{\alpha_0} = 2 \left(\frac{u}{v}\right)^2 \left[\arcsin \frac{v}{v_{гр}} - \frac{v}{v_{гр}} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{гр}}\right)^2} \right]. \qquad (26)$$

Усреднение по спектру скоростей УХН приводит к результату

$$\langle\langle \bar{\alpha} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\alpha}_0 \rangle\rangle \left[1 + k_{гр}^2 \langle \xi^2 \rangle \right] - \frac{8\sqrt{\pi}}{15} \left(\frac{u}{v_{гр}}\right)^2 k_{гр}^2 \langle \xi^2 \rangle k_{гр} l. \qquad (27)$$

Здесь

$$\langle\langle f(v) \rangle\rangle = \frac{4}{v_{гр}^4} \int_0^{v_{гр}} f(v) v^3 dv,$$

$$\langle\langle \overline{\alpha_0} \rangle\rangle = \frac{\pi}{2} \left(\frac{u}{v_{гр}}\right)^2. \qquad (28)$$

Таким образом, наличие шероховатостей поверхности стенок ловушки (при $\langle \xi \rangle = 0$) приводит к некоторому увеличению коэффициента поглощения: при $\lambda_n = 10^{-6}$ см и $\langle \xi^2 \rangle^{1/2} = 5 \cdot 10^{-7}$ см имеем $(\alpha - \alpha_0)/\alpha_0 \approx 0{,}2$. Однако этот результат не объясняет имеющиеся экспериментальные данные /I,7/.

Поступила в редакцию
I6 ноября I973 г.

Институт ядерных исследований АН СССР

Литература

1. Ф. Л. Шапиро. Сообщения ОИЯИ Р3-7135, 1973 г., Дубна.
2. И. М. Франк. Природа, №9, 24 (1972).
3. А. В. Степанов. ТМФ /в печати/.
4. В. К. Игнатович. Сообщения ОИЯИ Р4-7055, 1973 г., Дубна.
5. С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. М., изд-во "Наука", 1966 г.
6. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М., изд-во "Наука", 1972 г.
7. В. М. Лобашев и др. Препринт ЛИЯФ № 37, 1973 г.