Краткие сообщения по физике № 1 1974

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. И. Гудзенко

УДК 621.396

Показано, что спектральная интенсивность инвариантна относительно Фурье-сопряжения сигнала. Анализируется простейшее уравнение Ланжевена.

Пусть $B_{x,y}(\theta,\delta) \equiv \langle x^*(\theta)y(\theta+\delta)\rangle$ – корреляционная функция случайных функций $x(\theta)$, $y(\theta)$ вещественного аргумента. Воспользовавшись Фурье-разложением изменяющегося "во времени" сигнала $z(t)$

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{1}$$

и взаимным преобразованием для зависящей от "частоты" спектральной амплитуды

$$c^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^*(t)\exp(i\omega t)dt, \tag{1'}$$

представим корреляционную функцию сигнала в виде

$$B_{z,z}(t,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t+\tau)]d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \langle c(\omega)c^*(\omega+\nu)\rangle \exp[-i(\omega+\nu)t]d\nu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} B_{c^*,c^*}(\omega,\nu)\exp(-i\nu t)d\nu. \tag{2}$$

Предложим, как обычно, что $B_{z,z}(t,\tau)$ однозначно выражается через спектральную интенсивность сигнала $B_{z,z}(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G_{z,z}(\omega,t)\exp(i\omega\tau)d\omega$. При этом согласно (2) $G_{z,z}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B_{c^*,c^*}(\omega,\nu)\exp(-i\nu t)d\nu$. Но спектральная интенсивность

$G_{c^*,c^*}(\omega,t)$ комплексно-сопряженной амплитуды (I′) также равна $G_{c^*,c^*}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_{c^*,c^*}(\omega,\nu)\exp(-i\nu t)d\nu$. Взамен известной для стационарных сигналов формулы Винера-Хинчина в общем варианте нестационарности скалярного сигнала остается справедливым лишь правило

$$G_{c^*,c^*}(\omega,t) = G_{z,z}(\omega,t). \qquad (3)$$

Корреляционная функция векторного сигнала $\vec{z}(t) \equiv \{z_k(t), (k = \overline{1,K})\}$ имеет вид квадратной $K\times K$ – матрицы $\|B^{\vec{z}}_{k,l}(t,\tau)\|$, где $B^{\vec{z}}_{k,l} \equiv \langle z^*_k(t)z_l(t+\tau)\rangle$. Для составляющих сигнала напишем

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(\omega)\exp(i\omega t)d\omega, \quad c^*_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^*_k(t)\exp(i\omega t)dt;$$

$$B^{\vec{z}}_{k,l}(t,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[i\omega(t+\tau)]d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle c_l(\omega)c^*_k(\omega+\nu)\rangle\times$$

$$\times\exp[-i(\omega+\nu)t]d\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\tau)d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} B^{\vec{c}^*}_{l,k}(\omega,\nu)\exp(-i\nu t)d\nu. \qquad (4)$$

При этом

$$B^{\vec{z}}_{k,l}(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{\vec{z}}_{k,l}(\omega,t)\exp(i\omega\tau)d\omega,$$
$$G^{\vec{z}}_{k,l}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B^{\vec{z}}_{k,l}(t,\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau. \qquad (5)$$

Аналогично для матриц корреляционной функции и спектральной интенсивности амплитуды $\vec{c}(\omega)$ имеем

$$B^{\vec{c}}_{k,l}(\omega,\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{\vec{c}}_{k,l}(\omega,t)\exp(i\nu t)dt,$$
$$G^{\vec{c}}_{k,l}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B^{\vec{c}}_{k,l}(\omega,\nu)\exp(-i\nu t)d\nu. \qquad (6)$$

Согласно (4) и (5)

$$G^{\vec{z}}_{k,l}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B^{\vec{c}^*}_{l,k}(\omega,\nu)\exp(-i\nu t)d\nu. \qquad (7)$$

Учитывая (6) и (7), находим

$$G^{\vec{z}}_{k,l}(\omega,t) = G^{\vec{c}^*}_{l,k}(\omega,t). \qquad (8)$$

Для векторного сигнала спектральная интенсивность – инвариант преобразования, состоящего из Фурье-сопряжения сигнала ($\vec{z}(t) \to \vec{c}(\omega)$), комплексного сопряжения ($\vec{c} \to \vec{c}^*$) и перестановки индексов матрицы ($G_{k,l} \to G_{l,k}$).

Кратко проиллюстрируем, как спектральные интенсивности нестационарных случайных процессов служат при анализе уравнений Ланжевена. В простейшем примере

$$\frac{dz(t)}{dt} + Az(t) = f(t), \quad (t > t_0), \qquad (9)$$

где A – число, $f(t)$ – возмущающая динамическую систему флуктуационная сила. Умножим (9) при аргументе $t+\tau$ на $z^*(t)$ и статистически усредним

$$\langle z^*(t) \frac{dz}{dt}(t+\tau)\rangle + A\langle z^*(t)z(t+\tau)\rangle = \langle z^*(t)f(t+\tau)\rangle .$$

Учитывая $\langle z^*(t) \frac{dz}{dt}(t+\tau)\rangle = \frac{\partial}{\partial\tau} B_{z,z}(t,\tau)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau} B_{z,z}(t,\tau) + AB_{z,z}(t,\tau) = B_{z,f}(t,\tau), \quad (t > t_0, \tau > t_0 - t). \qquad (10)$$

При вычислении $B_{z,f}(t,\tau)$ предположим здесь (условие может иметь и другой вид), что начальные условия статистически не связаны со значениями флуктуационной силы. Это означает

$$\langle z^*(t_0)f(t+\tau)\rangle = \langle z(t_0)\rangle\langle f(t+\tau)\rangle = 0. \qquad (11)$$

Исходя из решения (9).

$$z(t) = \exp[-A(t-t_0)]\left\{z(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\theta)\exp[A(\theta-t_0)]d\theta\right\};$$

получаем при учете (II)

$$B_{z,f}(t,\tau) = \int_{t_0}^{t} \exp[A^*(\theta - t)] \quad B_{f,f}(\theta,\ t + \tau - \theta)d\theta, \quad (12)$$

$$\langle z^*(t)z(t_0)\rangle = \langle |z(t_0)|^2\rangle \exp\left[- A^*(t - t_0)\right]. \quad (13)$$

Умножив уравнение (10) на $\exp(- i\omega\tau)$ и интегрируя по τ от $t_0 - t$ до M, перейдем к спектральным интенсивностям. Обозначим

$$G_{x,y}(\tau_1,\tau_2;\omega,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} B_{x,y}(t,\tau)\exp(- i\omega\tau)d\tau,$$

$$G_{x,y}(\tau_0;\omega,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau_0}^{\infty} B_{x,y}(t,\tau)\exp(- i\omega\tau)d\tau,$$

$$G_{x,y}(\omega,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_{x,y}(t,\tau)\exp(- i\omega\tau)d\tau.$$

При учете формул (II), (12), (13) имеем:

$$\int_{t_0-t}^{M} \exp(- i\omega\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} B_{z,z}(t,\tau)d\tau = B_{z,z}(t,M)\exp(- i\omega M) -$$

$$- \langle |z(t_0)|^2\rangle \exp\left[(A^* - i\omega)(t_0 - t)\right] + i\omega\sqrt{2\pi}G_{z,z}(t_0 - t,M;\omega,t), \quad (14)$$

$$\int_{t_0-t}^{M} B_{z,f}(t,\tau)\exp(- i\omega\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \exp[A^*(\theta - t)]d\theta \int_{t_0-t}^{M} B_{f,f}(\theta,t + \tau - \theta)\exp(-i\omega\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0-t}^{0} G_{f,f}(t_0 - t - \theta,\ M - \theta;\ \omega,t + \theta)\exp\left[(A^* - i\omega)\theta\right]d\theta. \quad (15)$$

Ограничимся здесь анализом "эргодического" сигнала, когда $\lim_{M\to\infty} B_{z,z}(t,M) = 0$. Учитывая, что $\lim_{M\to\infty} G_{z,z}(t_0 - t,\ M;\ \omega,t) = G_{z,z}(\omega,t)$, на основании формул (10), (14), (15) находим

$$(A + i\omega)G_{z,z}(\omega,t) =$$

$$= \int\limits_{t_0-t}^{0} G_{f,f}(t_0 - t - \theta;\ \omega,\ t + \theta)\exp\left[(A^* - i\omega)\theta\right]d\theta +$$

$$+ \frac{\langle|z(t_0)|^2\rangle}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[(A^* - i\omega)(t_0 - t)\right]. \qquad (16)$$

В простейшем варианте сила $f(t)$ – стационарный "белый шум": $G_{f,f}(\omega,t) = G$. При этом $B_{f,f}(t,\tau) = \frac{G}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau)d\omega = \sqrt{2\pi}G\delta(\tau)$, и следовательно,

$$G_{f,f}(\lambda;\ \omega,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\lambda}^{\infty} B_{f,f}(t,\tau)\exp(-\ i\omega\tau)d\tau = GE(\lambda),$$

$$E(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda>0, \\ 1, & \lambda<1. \end{cases}$$

Таким образом

$$G_{z,z}(\omega,t) = \frac{G}{|A + i\omega|^2} + \left[\frac{\langle|z(t_0)|^2\rangle}{\sqrt{2\pi}(A + i\omega)} - \frac{G}{|A + i\omega|^2}\right]\times$$

$$\times \exp\left[(A^* - i\omega)(t_0 - t)\right]. \qquad (17)$$

Спустя время $\Delta t_A = \varkappa_1/\mathrm{Re}A$, ($\varkappa_1 \simeq 5 \div 6$) после начального момента t_0, сигнал $z(t)$ приобретает установившуюся спектральную интенсивность

$$G_{z,z}(\omega,t) \simeq G_{z,z}(\omega) \cong \frac{G}{(\mathrm{Re}A)^2 + (\mathrm{Im}A + \omega)^2}$$

в виде лоренцова контура с центром на частоте $\omega_A = -\mathrm{Im}A$. Приведенные оценки обоснованы, если динамически устойчивая система ($\mathrm{Re}A>0$) возмущается силой, спектральная интенсивность которой практически не зависит не только от времени, но и от частоты на интервале $\omega_A - \varkappa_2\mathrm{Re}A<\omega<\omega_A + \varkappa_2\mathrm{Re}A$, $\varkappa_2 \simeq 3 \div 4$.

Если же $f(t)$ – периодически нестационарный аналог белого шума, т.е. $G_{f,f}(\omega,t) = \sum\limits_k G_k\exp(ik\omega_0 t)$, то $B_{f,f}(t,\tau) = \sqrt{2\pi}\delta(\tau)\sum\limits_k G_k \times$ $\times\exp(ik\omega_0 t)$, $G_{f,f}(\lambda;\ \omega,\ t) = E(\lambda)\sum\limits_k G_k\exp(ik\omega_0 t)$. В соответствии с общей формулой (I6) находим для спектральной интенсивности сигнала в простейшей схеме установления (при $\mathrm{Re}A > 0$) его периодической нестационарности:

$$G_{z,z}(\omega,t) =$$

$$= \frac{1}{A + i\omega}\left\{\sum_{k} \frac{G_k \exp(ik\omega_0 t)}{A^* + i(k\omega_0 - \omega)}\left[1 - \exp\left\{\left[A^* + i(k\omega_0 - \omega)\right]\theta\right\}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\left\langle |z(t_0)|^2 \right\rangle}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[(A^* - i\omega)(t_0 - t)\right]\right\}.$$

Поступила в редакцию
I9 ноября I973 года.