Краткие сообщения по физике № 1 1974

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН НА РЕЗКОМ СКАЧКЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ ВО ВРЕМЕНИ

С. Н. Столяров

УДК 535.3

В работе найдены коэффициенты трансформации волн и спектральный состав излучения при резком скачке диэлектрической постоянной в среде с потерями и в плазме. Указано на связь трансформации волн в резко нестационарной среде с отражением волн от движущихся границ раздела.

Задача о трансформации плоских монохроматических электромагнитных волн на резком скачке во времени диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей впервые была решена для одномерного случая Моргенталером /I/. Впоследствии появился ряд работ по распространению и возбуждению волн в нестационарных средах (см. обзор /2/, работу /3/ и ссылки в них). Интерес к такого рода задачам вновь возник после работы В. Л. Гинзбурга о переходном излучении на резком диэлектрическом скачке во времени /4/. В данном сообщении, стимулированном этой работой, рассмотрены не отмеченные ранее интересные особенности трансформации волн на таком резком скачке.

Для этого рассмотрим распространение волны вида $\exp\{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}$ в однородной изотропной среде, комплексная диэлектрическая постоянная ε которой ($\mu = 1$) меняется в момент $t = 0$ от одного постоянного значения ε_1 (при $t<0$) до другого постоянного значения ε_2 (при $t>0$). Пусть до скачка (при $t<0$) вектор электрической индукции волны имеет вид $\vec{D}_1(\vec{r},t) = \vec{e}_1^{(+)}u_1^{(+)} \times \exp\{i(\omega_1^{(+)}t - \vec{k}_1\vec{r})\}$. Используя уравнения Максвелла и условия непрерывности в момент скачка векторов электрической $\vec{D}$ и магнитной $\vec{B}$ индукции /4/, получим, что возникающие после скачка (при $t>0$) две волны вида $\vec{D}_2^{(\pm)} = e_2^{(\pm)}u_2^{(\pm)}\exp\{i(\pm\omega_2^{(\pm)}t - \vec{k}_2^{(\pm)}\vec{r})\}$ имеют равные волновые вектора $\vec{k}_2^{(+)} = \vec{k}_2^{(-)} = \vec{k}_1 = \vec{k}$, ту же поляризацию $\vec{e}_2^{(+)} = \vec{e}_2^{(-)} = \vec{e}_1^{(+)} = \vec{e}$ и следующие амплитуды: $u_2^{(\pm)} = u_1^{(+)}\left[\omega_2^{(\mp)} \pm \omega_1^{(+)}\right]/2\left[\omega_2^{(+)} + \omega_2^{(-)}\right]$. Здесь и далее верхний знак соответствует волне, распространяющейся в том же направлении, что и падающая волна, нижний знак – волне, распространяющейся в противоположном направлении, а индексом I и 2 обозначаются величины соответственно до скачка (при $t<0$) и после него (при $t>0$). Аналогичные формулы для амплитуд электрических полей $E_2^{(\pm)}$ и векторного потенциала $A_2^{(\pm)}$ имеют вид $E_2^{(\pm)} = \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}\frac{\omega_2^{(\mp)} \pm \omega_1^{(+)}}{\omega_2^{(+)} + \omega_2^{(-)}} E_1^{(+)}$ и $A_2^{(\pm)} = \pm\frac{\varepsilon_1\omega_1^{(+)}}{2\varepsilon_2\omega_2^{(\pm)}}\frac{\omega_2^{(\mp)} \pm \omega_1^{(+)}}{\omega_2^{(+)} + \omega_2^{(-)}} A_1^{(+)}$.

В силу непрерывности волновых векторов частоты волн удовлетворяют соотношению

$$kc = \omega_1^{(+)}\sqrt{\varepsilon_1(\omega_1^{(+)})} = \omega_2^{(+)}\sqrt{\varepsilon_2(\omega_2^{(+)})} = \omega_2^{(-)}\sqrt{\varepsilon_2(-\omega_2^{(-)})}, \qquad (I)$$

где $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Поскольку выражение $\varepsilon''(\omega)$ является нечетной функцией частоты /5/, то при образовании после скачка поглощающей среды амплитуды обоих волн в ней будут экспоненциально затухать со временем. Например, если после скачка образуется среда с проводимостью σ_2, то $\varepsilon_2''(\omega) = 4\pi\sigma_2/\omega$, а частоты $\omega_2^{(\pm)}$ волн в ней принимают вид: $\omega_2^{(\pm)} = \left[k^2c^2/\varepsilon_2' - (2\pi\sigma_2/\varepsilon_2')^2\right]^{1/2} \pm i(2\pi\sigma_2/\varepsilon_2')$. Для прозрачных сред с $\varepsilon'' = 0$ и $\varepsilon_{1,2}' = n_{1,2}^2$ $\omega_2^{(\pm)} = \omega_2 = \omega_1 n_1/n_2$, где $\omega_1 = \omega_1^{(+)}$.

На квантовом языке инвариантность волновых векторов означает сохранение импульса фотонов в среде $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ до скачка и после него, а процесс трансформации волн на таком скачке можно рассматривать как процесс исчезновения свободной частицы с импульсом $\vec{p}$ и энергией $w_1 = \hbar\omega_1$ и рождение двух свободных частиц с тем же импульсом, но с разными значениями энергии $w_2^{(\pm)} = \pm\hbar\omega_2$, то есть рождение частицы и античастицы. Их соответствующие волновые функции имеют при этом вид $\psi_{1,2}^{(\pm)}(\vec{r},t) = u_{1,2}^{(\pm)}\exp\left\{(-i/\hbar)(\vec{p}\vec{r} - w_{1,2}^{(\pm)}t)\right\}$.

Резкий "обрыв" в момент $t = 0$ колебаний с частотой ω_1 и появление в тот же момент колебаний с частотами $\omega_2^{(\pm)}$ приводит при

разложении Фурье к появлению непрерывного частотного спектра. Действительно, фурье-образ $u(\omega)$ индукции $\mathcal{D}$ при скачке $\varepsilon(t)$ в слабопоглощающей среде имеет вид: $u(\omega) = \Big\{ \left[\gamma_1 + i(\omega - \omega_1)\right] \times$
$\times \left[(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2\right]^{-1} + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} - i\,\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\omega_2}\right]\left[\gamma_2 - i(\omega - \omega_2)\right] \times$
$\times \left[(\omega - \omega_2)^2 + \gamma_2^2\right]^{-1} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} + i\,\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\omega_2}\right]\left[\gamma_2 - i(\omega + \omega_2)\right] \times$
$\times \left[(\omega + \omega_2)^2 + \gamma_2^2\right]^{-1}\Big\} u_1^{(+)}/2\pi$, где $\gamma_{1,2} = 2\pi\sigma_{1,2}/n_{1,2}^2 =$ $= c\alpha_{1,2}/2n_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ – коэффициенты поглощения сред с показателями преломления $n_{1,2}$. Спектральная плотность излучения пропорциональна $|u(\omega)|^2$. При скачке в прозрачной среде ($\gamma_{1,2} \to 0$, $n_1 \neq n_2$) имеем: $|u(\omega)|^2 = \Big\{ \delta^2(\omega - \omega_1) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \times$
$\times\, \delta^2(\omega - \omega_2) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \delta^2(\omega + \omega_2) + \omega_1^4(n_2^2 - n_1^2)^2/\pi^2 n_1^4 \times$
$\times\, \mathrm{P.V.}(\omega - \omega_1)^{-2}(\omega^2 - \omega_2^2)^{-2}\Big\} |u_1^{(+)}|^2/4$. Здесь $\delta(\omega \pm \omega_{1,2})$ – δ – функция Дирака, а последнее слагаемое, в котором символ P.V. означает обращение его в нуль при $\omega = \omega_{1,2}$, соответствует непрерывному спектру. При скачке проводимости, когда $n_2 = n_1$, $\gamma_{1,2} \neq 0$, $|u(\omega)|^2 = (\gamma_1 + \gamma_2)^2 |u_1^{(+)}|^2 / 4\pi^2 \left[(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_1^2\right] \left[(\omega - \omega_1)^2 + \gamma_2^2\right]$, и имеет место заметное уширение спектра монохроматических сигналов. Например, при $\alpha_{1,2} \sim 0{,}1$ см$^{-1}$ (~ 50 дб/м) $\Delta\omega \approx \gamma_{1,2} = 10^9$ гц, то есть для излучения волн сантиметрового диапазона происходит сильное размытие линий.

При резком скачке показателя преломления прозрачных сред от n_1 до n_2 из-за работы внешних сил не сохраняется ни плотность электромагнитной энергии W, ни плотность потока энергии $\vec{S}$ причем $W_2/W_1 \simeq (n_2^2 + n_1^2)/2n_2^2$ и $S_2/S_1 \simeq n_1^2/n_2^2$. Плотность же импульса поля $\vec{g} = [\vec{D},\vec{B}]c/4\pi$, совпадающая с импульсом фотонов в среде, остается непрерывной в полном соответствии с квантовой картиной.

В случае, когда в прозрачной среде после скачка образуется холодная электронная плазма с концентрацией N и $cn_2^2(\omega_2) = (1 - \omega_p^2/\omega_2^2)$, где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$, из формул (I) следует, что $\omega_2 = (\omega_p^2 + \omega_1^2 n_1^2)^{1/2}$, $n_2 = \omega_1 n_1 (\omega_p^2 + \omega_1^2 n_1^2)^{-1/2}$, а коэффициенты трансформации падающей волны в прямую ($p = u_2^{(+)}/u_1^{(+)}$) и обратную ($r = u_2^{(-)}/u_1^{(+)}$) принимают вид $p = \left[1 + \omega_1(\omega_p^2 + \omega_1^2 n_1^2)^{-1/2}\right]/2$, $r = \left[1 - \omega_1(\omega_p^2 + \omega_1^2 n_1^2)^{-1/2}\right]/2$. При скачке вакуум-плазма ($n_1 = 1$) для высоких частот ($\omega_1 \gg \omega_p$) имеем $\omega_2 \simeq \omega_1$; $n_2 \simeq 1$; $p \simeq 1$ и $r \simeq \omega_p^2/4\omega_1^2 \ll 1$, то есть можно сказать, что волна не "чувствует" образования в вакууме такой плазмы. В обратном случае низких частот ($\omega_1 \ll \omega_p$) $\omega_2 \simeq \omega_p$, $n_2 \simeq \omega_1/\omega_p \ll 1$ и $p \simeq r \simeq 1/2$, то есть в плазме на частотах, близких к плазменным, возбуждаются две поперечные волны с равными амплитудами, причем $E_2/E_1 \simeq \omega_p^2/4\omega_1^2 \gg 1$. Последнее означает, что при таком образовании плазмы низкочастотные поля могут генерировать сильные квазипоперечные (ибо $n_2 \ll 1$) плазменные ($\omega_2 \simeq \omega_p$) колебания. При этом, по-видимому, существенен учет пространственной дисперсии. Такие явления могут иметь место, например, при сильных взрывах в ионосфере.

В заключение отметим, что "формулы Френеля" на диэлектрическом скачке во времени и хорошо известные формулы Френеля на диэлектрическом скачке в пространстве являются предельными случаями формул при отражении и преломлении волн на движущейся в покоящейся среде со скоростью $\vec{v}$ нормально самой себе границе раздела соответственно для случая $v = 0$ и $v = \infty$. Это следует как из условий на движущейся границе раздела /6/, так и из формул, полученных в работе /7/.

Автор выражает глубокую признательность В. Л. Гинзбургу за стимулирующее внимание к работе и Б. М. Болотовскому и А. И. Плису за плодотворные обсуждения.

Поступила в редакцию
20 ноября 1973 г.

Литература

1. F. R. Morgenthaler. IRE Trans. Microwave Theory and Technique, MTT-6, N2, 167 (1958).
2. Л. А. Островский, Н. С. Степанов. Изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
3. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, там же, 8, № 4, 760 (1965).
4. В. Л. Гинзбург, там же, 16, № 4, 512 (1973).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ. М., 1957 г.
6. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров. Изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, 4, № 6, 1171 (1961).
7. С. Н. Столяров, там же, 11, № 4, 543 (1968).