Краткие сообщения по физике № 1 1974

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕДАХ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СКАЧКАМИ КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВО ВРЕМЕНИ

С. Н. Столяров

УДК 535.3

В работе найдены коэффициенты трансформации волн на столообразном и в частности δ-образном скачке комплексной диэлектрической постоянной во времени, а также при линейном ее изменении на конечном интервале времени.

Ранее /I/ нами были рассмотрены особенности трансформации волн на резком диэлектрическом скачке во времени. Представляет интерес рассмотреть также распространение волн в среде с резким диэлектрическим скачком конечной длительности во времени, а также обсудить вопрос о влиянии нерезкости скачка на характер трансформации волн.

Рассмотрим задачу о распространении волн вида $\exp\{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}$ в среде, показатель преломления $n(t) = \sqrt{\varepsilon(t)}$ которой меняется по ступенчатому закону

$$n(t) = n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \quad \text{при} \quad t<0, \quad n(t) = n_3 = \sqrt{\varepsilon_3} \quad \text{при} \quad t>T,$$

$$n(t) = \tilde{n}_2 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2(\omega)} \quad \text{при} \quad 0<t<T, \qquad (I)$$

где $n_{1,3}$ – вещественны, а $\tilde{\varepsilon}_2(\omega) = \left[\varepsilon_2(\omega) + i\varepsilon_2''(\omega)\right]$ характеризует среду с потерями из-за проводимости $\sigma_2 = \omega\varepsilon_2''(\omega)/4\pi$, причем $\varepsilon_2''(\omega)$ является нечетной функцией частоты.

Пусть в этой среде распространяется (при $t<0$) волна с вектором электрической индукции $\vec{D}_1(\vec{r},t) = \vec{e}u_1^{(+)}\exp\{i(\omega_1 t - \vec{k}\vec{r})\}$. Тогда после первого скачка при $t = 0$ в среде с $n = \tilde{n}_2$ образуются две бегущие в противоположных направлениях волны с той же самой поляризацией $\vec{e}$ и с тем же волновым вектором $\vec{k}$ /I/:

$$\vec{D}_2(\vec{r},t) = \vec{e}\exp(-i\vec{k}\vec{r})\left\{u_2^{(+)}\exp\left[i\omega_2^{(+)}t\right] + u_2^{(-)}\exp\left[-i\omega_2^{(-)}t\right]\right\},$$

а после второго скачка при $t = T$ соответственно

$$\vec{D}_3(\vec{r},t) = \vec{e}\exp(-i\vec{k}\vec{r})\left\{u_3^{(+)}\exp(i\omega_3 t) + u_3^{(-)}\exp(-i\omega_3 t)\right\}.$$

При этом из дисперсионных уравнений для волн в каждой среде следует, что

$$ck = \omega_1 n_1 = \omega_2^{(+)}\tilde{n}_2\left(\omega_2^{(+)}\right) = \omega_2^{(-)}\tilde{n}_2\left(-\omega_2^{(-)}\right) = \omega_3 n_3, \qquad (2)$$

так что частота $\omega_3 = \omega_1 n_1/n_3$ вещественна, а частоты $\omega_2^{(\pm)}$ комплексны.

Условия непрерывности индукции /2/ $\vec{D}$ и $\vec{B}$ в моменты резких скачков $t = 0$ и $t = T$ приводят к следующей системе уравнений для определения неизвестных величин $u_{2,3}^{(\pm)}$:

$$u_1^{(+)} = u_2^{(+)} + u_2^{(-)}; \quad \omega_1 u_1^{(+)} = \omega_2^{(+)}u_2^{(+)} - \omega_2^{(-)}u_2^{(-)};$$

$$u_2^{(+)}\exp\left(i\omega_2^{(+)}T\right) + u_2^{(-)}\exp\left(-i\omega_2^{(-)}T\right) =$$

$$= u_3^{(+)}\exp(i\omega_3 T) + u_3^{(-)}\exp(-i\omega_3 T); \qquad (3)$$

$$\omega_2^{(+)}u_2^{(+)}\exp\left(i\omega_2^{(+)}T\right) - \omega_2^{(-)}u_2^{(-)}\exp\left(-i\omega_2^{(-)}T\right) =$$

$$= \omega_3\left[u_3^{(+)}\exp(i\omega_3 T) - u_3^{(-)}\exp(-i\omega_3 t)\right],$$

которая аналогична /I/ системе уравнений для амплитуд отраженных и преломленных волн при нормальном падении волны на движущуюся в среде со сверхсветовой скоростью диэлектрическую пластинку /3/. Решения для $u_2^{(\pm)}$ из системы (3) совпадают с полученными ранее /I/, а формулы для $u_3^{(\pm)}$ с учетом соотношений (2) принимают для вещественных $\tilde{n}_2$ вид

$$p = u_3^{(+)}/u_1^{(+)} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{n_3}{n_1}\right)\cos\omega_2 T + i\left(\frac{n_3}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right)\sin\omega_2 T\right]\exp(-i\omega_3 T)$$

$$r = u_3^{(-)}/u_1^{(+)} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{n_3}{n_1}\right)\cos\omega_2 T - i\left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{n_2}{n_1}\right)\sin\omega_2 T\right]\exp(i\omega_3 T), \qquad (4)$$

где $\omega_2 = \omega_1 n_1/n_2$. Отсюда сразу следуют условия отсутствия после такого скачка отраженной (обратной) волны, когда $u_3^{(-)} = 0$.

Они имеют вид $n_2^2 = n_1 n_3$ и $L = cT = (2m+1)\lambda_2/4$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, а $\lambda_2 = 2\pi c/\omega_2$, и естественно совпадают с хорошо известными условиями просветления оптических приборов с помощью диэлектрических покрытий. Однако в отличие от последних плотность потока энергии S_3 после скачка не совпадает с плотностью потока энергии S_1 до скачка, ибо $S_3 = S_1 n_1^2/n_3^2$. Эти величины остаются непрерывными только в случае симметричного скачка с $n_3 = n_1$.

При комплексном показателе преломления $\tilde{n}_2$ для симметричного скачка с $n_3 = n_1$ из системы (3) с помощью соотношений (2) получим

$$p = \frac{1}{2}\exp(-i\omega_1 T)\left\{\left[\exp\left(i\omega_2^{(+)}T\right) + \exp\left(-i\omega_2^{(-)}T\right)\right] + \frac{\omega_1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\omega_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - (2\pi\sigma_2)^2\right]^{-1/2}\left[\exp\left(i\omega_2^{(+)}T\right) - \exp\left(-i\omega_2^{(-)}T\right)\right]\right\};$$

$$r = \frac{1}{2}\exp(i\omega_1 T)\left[\exp\left(i\omega_2^{(+)}T\right) - \exp\left(-i\omega_2^{(-)}T\right)\right]\left[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}\omega_1 - i2\pi\sigma_2\right]\times$$

$$\times\left[\omega_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - (2\pi\sigma_2)^2\right]^{-1/2}, \qquad (5)$$

где $\omega_2^{(\pm)} = \left\{\left[\omega_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - (2\pi\sigma_2)^2\right]^{1/2} \pm i(2\pi\sigma_2)\right\}/\varepsilon_2$. Проводимость σ_2 связана с потерями α_2 в этой среде соотношением $\varkappa_2 = 4\pi\sigma_2/cn_2$. Из формул (4) и (5) следует, что для вещественного симметричного скачка $|r|^2 = \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2}\right)^2 \sin^2(\omega_1 T n_1/n_2)$ и $|p|^2 = 1 + |r|^2$ так что при δ- образном изменении $\varepsilon(t)$, когда $\lim(n_2 T) = 1$ при $n_2 \to \infty$ и $T \to 0$, $|r|^2 = 0$, то есть волна не "чувствует" такого скачка. В случае δ-образного скачка в проводимости σ_2, когда $\lim(\sigma_2 T) = 1$ при $\sigma_2 \to \infty$ и $T \to 0$, из формул (5) при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ получим, что $r \simeq (1/2)[1 - \exp(-4\pi/\varepsilon)]$ и $p \simeq (1/2)[1 + \exp(-4\pi/\varepsilon)]$, то есть при таком скачке волна "расщепляется" на две бегущие навстречу волны с приблизительно равными амплитудами. При этом $|p|^2 \neq 1 + |r|^2$, то есть при таком скачке опять имеет место несохранение потока энергии.

В заключение на примере среды с линейным законом изменения $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 = n_1^2 \text{ при } t<0,$$
$$\varepsilon(t) = (\varepsilon_1 + qt) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_2 = n_2^2 \text{ при } t>T,$$

где $q = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/T$, рассмотрим вопрос о степени применимости приближения резкого скачка диэлектрической проницаемости во времени. Оценка коэффициента отражения от такого слоя и изменения частоты волн применительно к другим задачам дана в работе /4/. Поэтому мы приводим здесь без вывода выражения для величин $p = A_2^{(+)}/A_1^{(+)}$ и $r = A_2^{(-)}/A_1^{(+)}$, равных отношениям амплитуд векторного потенциала в этих волнах:

$$p = \frac{\pi z_1}{8} \exp(-i\omega_2 T) F^{(+)}; \qquad r = \frac{\pi z_1}{8} \exp(i\omega_2 T) F^{(-)}, \tag{7}$$

где $z_{1,2} = 2kcn_{1,2}/q$; $\omega_2 = \omega_1 n_1/n_2$; $F^{(\pm)} = 2i\Big\{\big[J_0(z_1) - iJ_1(z_1)\big]\big[N_0(z_2) \pm iN_1(z_2)\big] - \big[J_0(z_2) \pm iJ_1(z_2)\big]\big[N_0(z_1) - iN_1(z_1)\big]\Big\}$,

а $J_{0,1}(z)$ и $N_{0,1}(z)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядка от комплексного аргумента z.

Для вещественных $n_{1,2}$ при $z_{1,2} \ll 1$, оставляя все члены в разложении функций $J_{0,1}$ и $N_{0,1}$ вплоть до линейных, получим

$$p \simeq \frac{1}{2} \exp(-ikcT/n_2)\left\{(1 + n_1/n_2) + ikcTn_1\left[\frac{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + \frac{1}{n_1 n_2}\right]\right\},$$
$$r \simeq \frac{1}{2} \exp(ikcT/n_2)\left\{(1 - n_1/n_2) + ikcTn_1\left[\frac{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - \frac{1}{n_1 n_2}\right]\right\}, \tag{8}$$

а при $z_{1,2} \gg 1$

$$p \simeq (n_1/n_2)^{1/2}\left[1 - \frac{n_1}{n_2}\exp\left(4i\,\frac{kcT}{n_2 + n_1}\right)\right]\exp\left(-i\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\,kcT/n_1\right),$$
$$r \simeq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8kcT(n_1 n_2)^{1/2}}\left[1 - \frac{n_1}{n_2}\exp\left(4i\,\frac{kcT}{n_2 + n_1}\right)\right] \times \exp\left(i\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\,\frac{kcT}{n_1} + i\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Фактическим параметром разложения в этих формулах является величина $\chi = kcT/|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$, причем в случае (8) $\chi \ll 1$, а в случае (9) $\chi \gg 1$. Для данного конкретного закона (6) величина χ характеризует скорость изменения $\varepsilon(t)$ за период $T_0 = 2\pi/ck$ колебания волны в вакууме, так что случай $\chi \ll 1$ соответствует условию $T_0 |d\varepsilon/dt| \gg 1$, то есть рассмотренному ранее /I/ случаю резкого изменения $\varepsilon(t)$, а случай $\chi \gg 1$ соответствует условию $T_0 |d\varepsilon/dt| \ll 1$, то есть случаю медленного изменения $\varepsilon(t)$. Этот случай, соответствующий приближению так называемой временной геометрической оптики, будет подробнее рассмотрен нами позднее.

Обсудим теперь формулы (8) и (9). Для случая $\chi \ll 1$ величины p и r в нулевом приближении по параметру χ совпадают с соответствующими формулами для амплитуд векторного потенциала на резком скачке /I/. Как видно из (8), поправки в следующем порядке по параметру малости χ оказываются линейными по χ для фаз коэффициентов p и r и квадратичными по χ - для их амплитуд. В случае $\chi \gg 1$ формулы (9) показывают, что в нулевом приближении по малому параметру $1/\chi$ коэффициент трансформации r в отраженную (обратную) волну обращается в нуль - нет "отражения", а величина $|p| \simeq (n_1/n_2)^{1/2}$, то есть изменяется так же, как и в приближении геометрической оптики. Учет членов следующего порядка малости по $1/\chi$ приводит к появлению слабого отражения $(|r| \sim 1/\chi^2 \ll 1)$ и к линейным поправкам в фазе величины p и квадратичным - в ее амплитуде. Выражение для величины коэффициента отражения r в формулах (9) показывает, что фаза отраженной волны пропорциональна набегу фаз прямой и обратной волны на толщине слоя kcT плюс добавок $\pi/2$ к фазе, который всегда возникает при полном внутреннем отражении волн. Кроме того в этом случае

$$|r| = \frac{|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|}{8kcT(n_1 n_2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} - 2\frac{n_1}{n_2}\cos\left[\frac{4kcT}{(n_1 + n_2)}\right] \right\}^{1/2},$$

то есть коэффициент отражения модулирован в зависимость от толщины (kcT) линейного слоя (6) точно так же, как это имеет место в оптике диэлектрических покрытий.

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу и Б. М. Болотовскому за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
12 декабря 1973 г.

Литература

1. С. Н. Столяров. Краткие сообщения по физике ФИАН, № I 26, (1974).
2. В. Л. Гинзбург. Изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, 16, № 4, 512 (1973).
3. С. Н. Столяров. Изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, 11, № 4, 542 (1968).
4. Г. А. Аскарьян, В. А. Погосян. ЖЭТФ, 65, в. I (7), 115 (1973).