Краткие сообщения по физике № 8 1974

О НАГРУЗКЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ИОНАМИ

А. А. Коломенский, И. И. Логачев,
А. А. Скрыльник

УДК 539.1.076

Рассмотрен вопрос о нагрузке вращающегося электронного пучка ионами. Анализируется движение частиц во вращающейся системе отсчета. Получены условия равновесия двухкомпонентного пучка во вращающейся системе отсчета и пространственное положение его центра тяжести. Найдена зависимость энергии электронов и ионов от радиуса в лабораторной системе отсчета.

Рассмотрение механизма ускорения ионов вращением и сканированием электронных пучков /1,2/ проводилось в предположении ускорения малого количества ионов, которое практически не изменяет пространственную конфигурацию электронного пучка. Однако для практических оценок эффективности метода необходимо учитывать нагрузку электронного пучка ионами, когда интенсивность ионного пучка значительна. Эта нагрузка будет влиять на движение обеих компонент (электронов и ионов) и на их энергию. Исследование этого вопроса целесообразно проводить в неинерциальной вращающейся системе отсчета.

В отсутствии взаимодействия между электронами и ионами в пространстве существовали бы две вращающиеся с частотой ω спирали, шаг которых определялся бы скоростью электронов и ионов. При достаточно сильном взаимодействии между электронами и ионами оба пучка образуют в пространстве одну спираль, центр тяжести которой вращается с той же частотой ω. Для определения пространственного положения центра тяжести такого "электрон-ионного" пучка перейдем во вращающуюся систему отсчета, которая определяется метрическим тензором g_{ik}

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2} & 0 & -\frac{\omega r^2}{c} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega r^2}{c} & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (I)$$

Движение свободной частицы в неинерциальной системе отсчета описывается уравнением

$$Du^i = 0, \qquad (2)$$

где D – оператор ковариантного дифференциала, u^i – четырехскорость частицы. При определении скорости частицы по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы, это уравнение запишется в виде /3/

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) + \lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{mc^2 \gamma^{\alpha\beta}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\ln\sqrt{h}) + \sqrt{h}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\gamma}\right)\frac{v^\gamma}{c}\right\}. \qquad (3)$$

Здесь $dt = (\sqrt{h}/c)(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)$ – синхронизованное вдоль траектории время, $v^\alpha = dx^\alpha/dt$, $g_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00}$, $h = g_{00}$, $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}$ – трехмерный метрический тензор, определяющий геометрические свойства пространства, $\lambda^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial\gamma_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial\gamma_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}\right)$ – трехмерный символ Кристоффеля. Проектируя уравнение (2) на касательную к траектории частицы, получаем первый интеграл, который выражает сохранение полной энергии частицы при движении в стационарных полях

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{const} = \Gamma_0. \qquad (4)$$

Соотношение (4) позволяет получить явную зависимость скорости частицы от радиуса

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1-(1-x^2)/\Gamma_0^2}, \qquad (5)$$

где $x = \omega r/c$. Проектируя уравнение (3) на нормаль к пучку, получаем зависимость v^{θ} от радиуса

$$v^{\theta} = -\omega\sqrt{h}. \qquad (6)$$

При наличии взаимодействия между электронами и ионами уравнение (2) принимает вид:

$$mc\,\frac{Du^{i}}{ds} = N^{i}, \qquad (7)$$

где N^{i} - член, обусловленный взаимодействием электронов и ионов. Можно считать, что при малых поперечных размерах пучков вектор N^{i} направлен по нормали к оси пучка. Отсюда следует, что зависимость скорости электронов и ионов от радиуса в случае, когда между ними существует взаимодействие, дается той же формулой (5).

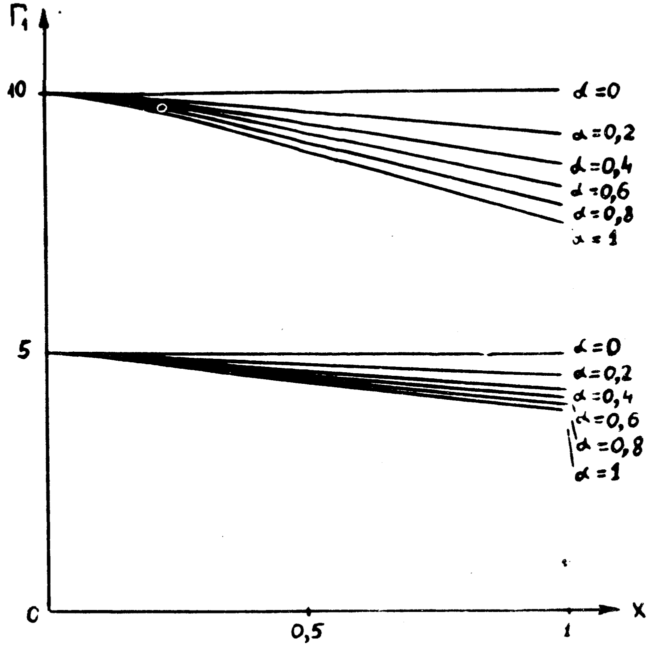
Равновесие "электрон-ионного" пучка во вращающейся системе отсчета позволяет определить пространственное положение его центра тяжести. Запишем условие равновесия единицы длины пучка (для этого сложим проекции уравнений (7) для ионов и электронов на нормаль к пучку)

$$\rho_1\beta_1\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1 - x\beta_1 y}{1 - x^2}\right) + \rho_2\beta_2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1 - x\beta_2 y}{1 - x^2}\right) = 0, \qquad (8)$$

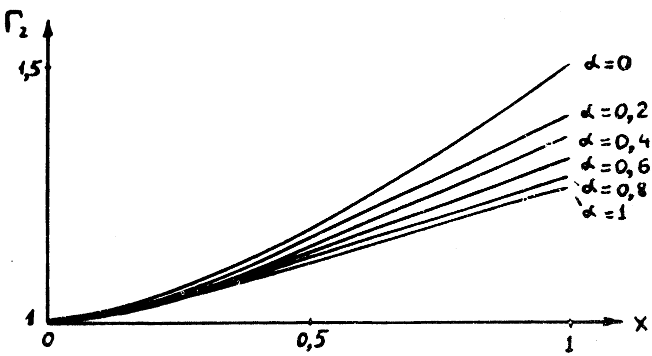
где ρ_i - плотности частиц пучка, $\beta_i = \sqrt{1 - (1 - x^2)/\Gamma_{io}^2}$,
$y \equiv -xv_1^{\theta}/\omega\sqrt{h}\beta_1 = -xv_2^{\theta}/\omega\sqrt{h}\beta_2$ - функция, которая в силу того, что электроны и ионы движутся по одной траектории, не зависит от типа частиц и является характеристикой "электрон-ионного" пучка. Здесь и в дальнейшем электроны и ионы будем обозначать, соответственно, индексами "I" и "2". Воспользовавшись уравнением непрерывности, которое во вращающейся системе отсчета имеет вид $j_1 = \rho_1 v_1 = const$, $j_2 = \rho_2 v_2 = const$, находим решение уравнения (8)

$$y = \frac{(j_1 + j_2)x}{j_1\beta_1 + j_2\beta_2}. \qquad (9)$$

Явный вид функции y позволяет найти зависимости энергий электронов и ионов от радиуса. Можно показать, что полная энергия частицы в лабораторной системе отсчета Γ_{li} и во вращающейся Γ_i связаны соотношением



а)

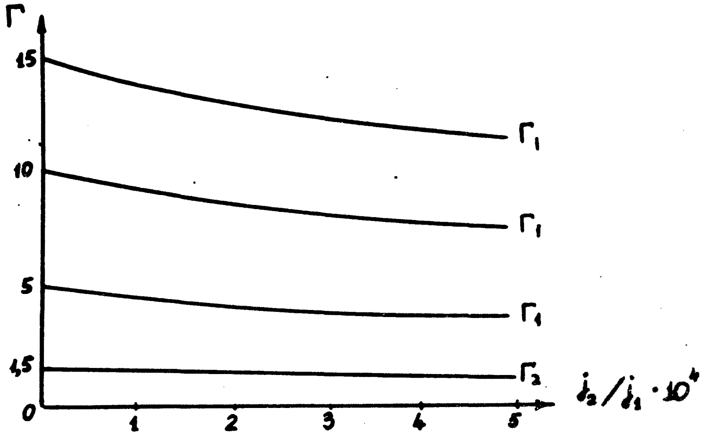


б)

Р и с. I (а.б) Зависимость энергии электронов (а) и ионов (б) от радиуса

$$\Gamma_{1i} = \frac{\Gamma_i}{h}\left(\sqrt{h} + \frac{\omega r^2}{c^2} v_i^{\theta}\right) \qquad (i = 1,2). \qquad (10)$$

Воспользовавшись законом сохранения полной энергии частицы при движении в стационарных полях (4) и вводя переменные x и y, выражение (10) можно переписать в виде:



Р и с. 2. Влияние нагрузки электронного пучка ионами $\left(x = \frac{\omega r}{c} = 1\right)$

$$\Gamma_{1i}(x) = \frac{\Gamma_{io}}{1 - x^2}\left[1 - x\beta_i(x)y\right] \qquad (i = 1,2), \qquad (11)$$

где $\beta_i = \sqrt{1 - (1 - x^2)/\Gamma_{io}^2}$, $y = (1 + \alpha)x/(\beta_1 + \alpha\beta_2)$, $\alpha = j_2/j_1$.
Зависимость $\Gamma_{11}(x)$, $\Gamma_{12}(x)$ при $\Gamma_{10} = 5,\ 10$, $\Gamma_{20} = 1{,}01$ приведена на рис. 1 (а,б). Как следует из выражения (3) и видно на графиках, нагрузка электронного пучка ионами ведет к уменьшению энергии ускоряемых ионов.

При x=1 (на характерном расстоянии, равном циклотронному радиусу $r = R = c/\omega$) значения энергий электронов и ионов остаются конечными и равными

$$\Gamma_{1i}(x = 1) = \Gamma_{io}\left\{1 + \frac{1}{2(1 + \alpha)}\left[\left(\frac{1}{\Gamma_{io}^2} - \frac{1}{\Gamma_{10}^2}\right) - \alpha\left(\frac{1}{\Gamma_{20}^2} - \frac{1}{\Gamma_{io}^2}\right)\right]\right\}$$
$$(i = 1,2). \qquad (12)$$

Для всех представляющих практический интерес случаев $\Gamma_{10} \gg 1$, $\Gamma_{20} \simeq 1$. Тогда выражение (12) упрощается

$$\Gamma_{11} \simeq \Gamma_{10}\left[1 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\right], \quad \Gamma_{12} \simeq 1 + \frac{1}{2(1+\alpha)}. \qquad (13)$$

Зависимость $\Gamma_{11}(x=1)$ от $(j_2/j_1)10^4$ при $\Gamma_{10}=5$, 10, 15 и $\Gamma_{20}=1$ представлена на рис. 2. Здесь j_1 и j_2 - плотности токов электронов и ионов, выраженные в $А/см^2$.

Результаты настоящей работы позволяют определить требования к плотности электронного пучка и его угловой скорости вращения для заданной интенсивности и энергии пучка ускоренных ионов.

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность А. В. Белову, Н. В. Павлову за плодотворные обсуждения и Г. И. Харламовой за помощь в проведении численных расчетов.

Поступила в редакцию
6 мая 1974 г.

Литература

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, И. И. Логачев. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 63 (1971).
2. А. А. Коломенский, И. И. Логачев. Труды 8 Международной конференции по ускорителям, Женева, ЦЕРН, 587 (1971).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, "Наука", 1973 г.