Краткие сообщения по физике № 3 март 1973

ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ МОДЕЛИ И АМПЛИТУДА ВЕНЕЦИАНО

В. И. Манько, Д. А. Трифонов

I. Введение

В рамках подхода, основанного на бесконечнокомпонентных уравнениях, можно использовать представление об элементарных частицах как описываемых дополнительными непрерывными внутренними переменными u_μ. Впервые внутренние переменные были введены в релятивистские уравнения для описания спектра масс Гинзбургом и Таммом /I/. В этой работе рассматривалось уравнение, описывающее обобщение наглядной физической модели релятивистского волчка. В работах Юкавы /2/ и Маркова /3/ строились релятивистские уравнения на основе физической модели релятивистского осциллятора. В этих моделях частица описывается непрерывной координатой центра масс x_μ и координатой u_μ, которую можно рассматривать как координату движения относительно этого центра масс. В указанных уравнениях переменные разделяются, и масса получается как собственное значение массового оператора, зависящего от внутренней переменной u_μ. Позже осцилляторные модели рассматривались в различных аспектах и в других работах, в частности, в /4-6/. В работе /6/ была изучена связь осцилляторной модели с группой неинвариантности SU_3. В последнее время осцилляторные модели привлекают внимание с точки зрения возможной связи с амплитудами Венециано /7/. Сусскинд /8/ показал, что модель Венециано эквивалентна осцилляторной модели элементарных частиц (мезонов), в которой мезон состоит из двух партонов (кварков), взаимодействующих посредством гармонического потенциала. При этом постулируется определенный вид вершинного оператора и пропагатора. Рассмотренная Сусскиндом модель фактически совпадает с моделями /I-3/, основанными на уравнениях с внутренними переменными. При демонстрации осцилляторной аналогии модели Венециано в работе /8/ использовался метод когерентных состояний /9/. В частности, используемый вершинный оператор совпадает с оператором Вейля (оператор Вейля, действуя на вакуум, дает когерентное состояние). Представление когерентных состояний в применении к теории сильновзаимодействующих частиц рассматривалось в ряде работ /10-12/. Боголюбовым /12/ подробнее рассмотрена связь метода когерентных состояний с кварковыми моделями (в частности, с осцилляторной моделью), а в работах /11/ когерентные состояния используются при выявлении факторизации дуальных амплитуд. Небезинтересно отметить, что представление когерентных состояний оказалось очень эффективным при получении точных амплитуд для квантовых систем с квадратичными гамильтонианами /13/. В представлении Фока, существующем для любой квантовой системы, эти амплитуды выражены в замкнутом виде через классические полиномы Эрмита многих переменных.

Цель настоящей работы - показать, что в рамках осцилляторной модели (в подходе Сусскинда) имеется широкий набор возможностей получить амплитуду Венециано, постулируя различные вершинные операторы, и описать класс таких операторов.

II. Класс вершинных операторов, приводящих к амплитуде Венециано

В осцилляторной модели считают, что внутреннее состояние частицы описывается уравнением

$$(M^2 - M_0^2 + 2\omega \hat{a}^+_\mu \hat{a}_\mu)\Psi = 0, \tag{1}$$

где M_0 есть масса основного состояния, $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ - операторы рождения и уничтожения четырехмерных осцилляторов, M^2 - массовый оператор. В релятивистском уравнении (1) в рамках данной модели можно перейти к эвклидовой метрике введением мнимой координаты, что эквивалентно переходу к индефинитной метрике /3,12/. В пространстве решений уравнения (1) можно в явном виде построить ортонормированный фоковский базис

$$|n_\mu\rangle = (n_\mu!)^{-1/2}(\hat{a}^+_\mu)^{n_\mu}|0\rangle \tag{2}$$

и базис когерентных состояний

$$|\alpha_\mu\rangle = \exp(\alpha_\mu \hat{a}^+_\mu - \alpha^*_\mu \hat{a}_\mu)|0\rangle = D(\alpha_\mu ; \hat{a}_\mu)|0\rangle , \qquad (3)$$

где $n_\mu = 0,1,2,\ldots$, α_μ – произвольное комплексное число, $D(\alpha;\hat{a})$ – оператор Вейля.

Для получения амплитуды Венециано вместо одного четырехмерного осциллятора надо рассмотреть набор осцилляторов, т.е. в уравнении (I) надо ввести индекс $j = 1,2,\ldots;$ $\omega^{(j)}$, $\hat{a}^{(j)}_\mu$. Если принять вышеописанную осцилляторную модель за модель мезона, все пространство, генерируемое из "вакуума" (основного состояния) посредством действия повышающих операторов $\hat{a}^+_\mu$, надо рассматривать как пространство возможных состояний мезонов. Массовый оператор есть

$$M^2 = M_0^2 + 2 \sum_j \omega^{(j)} \hat{a}^{+(j)}_\mu \hat{a}^{(j)}_\mu . \qquad (4)$$

Как уже отмечалось, операторы $\hat{a}_\mu$ связаны с относительным движением (партонов) внутри мезона. Они выражаются через относительную координату u_μ и относительный импульс по известным формулам для гармонического осциллятора. В случае бесконечного набора осцилляторов нужно ввести угловой параметр θ

$$u_\mu(\theta) = i\sqrt{2} \sum_j \frac{1}{\sqrt{\omega^{(j)}}} \left(\hat{a}^{(j)}_\mu + \hat{a}^{+(j)}_\mu\right) \cos j\theta . \qquad (5)$$

Можно считать, что двум кваркам, составляющим мезон, соответствуют значения $\theta = 0,\pi$, и осцилляторы $\hat{a}_\mu$ рассматривать как моды свободной струны или резиновой полосы /8,I4/. В работе /8/ было рассмотрено рассеяние квантов скалярного поля такой гармонической системы и получена амплитуда Венециано, при заданном виде пропагатора мезона и вершинного оператора. Покажем, что в данном формализме существует значительный оперативный простор в выборе вершинных операторов, приводящих к формуле Венециано. Рассмотрим четырехточечную диаграмму,

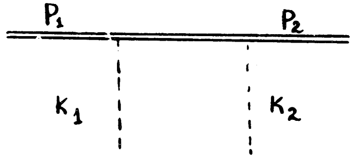

Рис. I.

где двумя линиями изображаются мезоны, а рассеиваемые скалярные частицы с импульсами k_1 и k_2 – одной линией. Будем считать, что внешние мезоны с импульсами p_1 и p_2 находятся в основном состоянии. Зададим правила соответствия. Квант с импульсом k_μ поглощается или излучается отдельным кварком в точке, причем этому процессу соответствуют вершинные операторы

$$\hat{T}_0(k) = \exp\left(ik_\mu \frac{1}{\sqrt{\omega(j)}} \hat{a}_\mu^{+(j)} \right) F(\hat{a}_\mu^+ \hat{a}_\mu) \exp\left(ik_\mu \frac{1}{\sqrt{\omega(j)}} \hat{a}_\mu^{(j)} + ik_\mu x_\mu \right),$$

$$\hat{T}_\pi(k) = \exp\left(ik_\mu \frac{(-1)^j}{\sqrt{\omega(j)}} \hat{a}_\mu^{+(j)} \right) F(\hat{a}_\mu^+ \hat{a}_\mu) \exp\left(ik_\mu \frac{(-1)^j}{\sqrt{\omega(j)}} \hat{a}_\mu^{(j)} + ik_\mu x_\mu \right)$$

(6)

где $F(\hat{a}^+\hat{a})$ есть произвольная функция оператора числа частиц, ряд Тэлора которой начинается с единицы, $F(0) = 1$; x_μ есть координата центра инерции, индексы 0 и π относятся к кваркам, которым соответствуют значения угловой переменной $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно. В качестве функции распространения промежуточной частицы с импульсом p выбираем пропагатор $(p^2 + M^2)^{-1}$, где M^2 есть массовый оператор (4). В формулах (6) множитель $\exp(ik_\mu x_\mu)$ отвечает закону сохранения четырехмерного импульса, и в дальнейшем его не будем писать, считая, что везде импульс сохраняется. Вершинные операторы (6) совпадают с операторами Сусскинда /8/ при $F(x) = 1$. Выберем частоты $\omega^{(j)} = j/2$. Как уже отмечалось, будем считать, что внешние мезоны находятся в основном состоянии. Тогда диаграмме на рис. I соответствует матричный элемент

$$T_{0,0}(k_1,k_2) = \langle 0|\hat{T}_0(k_2)\left[(p_1 + k_1)^2 + M^2\right]^{-1}\hat{T}_0(k_1)|0\rangle . \quad (7)$$

Заметим, что оператор $\hat{T}_0(k)$ действует на вакуум как оператор Вейля

$$\hat{T}_0(k)|0\rangle = \exp\left(\frac{1}{2} |\vec{\alpha}(k)|^2 \right) |\vec{\alpha}(k)\rangle , \quad (8)$$

где $\vec{\alpha}(k) = (\alpha_1(k), \alpha_2(k), \ldots)$, а $|\vec{\alpha}(k)\rangle$ есть нормированное когерентное состояние. Собственные значения $\alpha_j(k)$ имеют вид $\alpha_j(k_\mu) = ik_\mu\sqrt{2/j}$. Если воспользоваться формулой $(p^2 + M^2)^{-1} \int_0^1 X^{p^2+M^2-1} dX$, матричный элемент $T_{0,0}(k_1,k_2)$ можно записать в виде

$$T_{0,0}(k_1,k_2) =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}\left(|\vec{\alpha}(k_1)|^2 + |\vec{\alpha}(k_2)|^2\right)\right] \int_0^1 dx x^{p^2-1} \langle \vec{\alpha}^*(k_2)| x^{M^2} |\vec{\alpha}(k_1)\rangle \cdot \tag{9}$$

Далее нам надо вычислить матричный элемент от оператора $x^{\hat{a}^+\hat{a}}$ по когерентным состояниям. Для этого воспользуемся формулой

$$\langle\beta| x^{\hat{a}^+\hat{a}}|\alpha\rangle = \exp\left[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2 + \alpha\beta^* x\right], \tag{10}$$

после чего амплитуда $T_{0,0}(k_1,k_2)$ принимает вид интеграла Эйлера первого рода (бета-функции)

$$T_{0,0}(k_1,k_2) = \int_0^1 dx x^{p^2+M_0^2-1} \prod_j \exp\left(-\frac{2}{j} k_1\cdot k_2 x^j\right) = \tag{11}$$

$$= \int_0^1 dx x^{p^2+M_0^2-1}(1-x)^{2k_1\cdot k_2}.$$

Обозначим переменные Мандельштама

$$p^2 = (p_1 + k_1)^2 = s,\ (k_1 + k_2)^2 = t,\ (p_1 + k_2)^2 = u. \tag{12}$$

Бета-функция симметрична по своим аргументам, но чтобы сделать ее симметричной по переменным s и t, надо наложить условие

$$M_0^2 = 1 - 2\mu^2, \tag{13}$$

где $\mu^2 = k^2$ есть масса поглощаемого или испускаемого кванта;

$$T_{0,0}(k_1,k_2) = B(1 + s - 2\mu^2,\ 1 + t - 2\mu^2). \tag{14}$$

Формула (14) дает амплитуду процесса, изображенного на рис. 1, когда оба кванта поглощаются одним кварком, соответствующим значению $\theta = 0$. Для получения полной амплитуды надо рассмотреть, еще диаграммы, в которых оба кванта поглощаются вторым кварком или же каждый кварк поглощает (испускает) один из квантов.

Между амплитудами возможных процессов существуют соотношения /8/

$$T_{0,0}(k_1,k_2) = T_{\pi,\pi}(k_1,k_2), \quad T_{0,\pi}(k_1,k_2) = T_{\pi,0}(k_1,k_2), \qquad (15)$$

и аналогичные соотношения имеют место для случая, когда кванты меняются местами $k_1 \rightleftharpoons k_2$. Амплитуды (15) считаются таким же образом, как и амплитуда $T_{0,0}(k_1,k_2)$. Для того, чтобы полная амплитуда была полностью симметрична по всем переменным s, t и u, надо наложить на массу кванта ограничение

$$\mu^2 = -1. \qquad (16)$$

После этого полная четырехточечная функция, вычисленная в данной осцилляторной модели, совпадает с формулой Венециано

$$A(k_1,k_2) = 2\left[B(s-1,\ t-1) + B(u-1,\ t-1) + B(s-1,\ u-1)\right]. \qquad (17)$$

Ограничение (16) на массу кванта можно снять таким же образом, как и в случае, когда $F(x) = 1$, введением в вершинный оператор дополнительной моды /15,8/

$$\hat{T}'(k) = G(\hat{b}^+,\ \hat{b})\hat{T}(k), \qquad (18)$$

где функция $G(\hat{b}^+,\ \hat{b})$ имеет вид ряда по $\hat{b}^+$, $\hat{b}$. Таким образом, полученные формулы остаются в силе для произвольной массы скалярного поля.

Мы получили, что амплитуде Венециано, в рамках осцилляторной модели, соответствует множество вершинных операторов (6), произвол в выборе которых дается функцией от операторов числа частиц. Заметим, что такая "инвариантность" имеет место только для четырехточечной функции - полученные здесь формулы полностью совпадают с результатами работы Суоскинда /8/. В общем же случае N-точечной функции зависимость от F войдет явным образом в амплитуды процессов. Этот вопрос будет рассмотрен в другой работе.

Поступила в редакцию
20 декабря 1972 г.

Литература

1. В. Л. Гинзбург, И. Е. Тамм ЖЭТФ, 17, 227 (1947).
2. H. Yukawa. Phys. Rev., 77, 219 (1950); 91, 415 (1953).
3. М. А. Марков. ДАН СССР, 51, 101 (1955); Nuovo Cim., Suppl., 3, №4, 760 (1956.
4. T. Takabayasi. Nuovo Cim., 33, 668 (1964).
5. В. И. Манько. Ядерная физика, 2, 512 (1965).
6. V. L. Ginzburg, V. I. Man'ko. Nucl. Phys., 74, 577 (1965).
7. G. Veneziano. Nuovo Cimento, 57A, 190 (1968).
8. L. Susskind. Nuovo Cim., 69A, 457 (1970); Phys. Rev. Letts., 23, 545 (1969).
9. R. Glauber. Phys. Rev., 131, 2766 (1963); Дж. Клаудер, Э. Сударшан. Основы квантовой оптики, "Мир", Москва, 1970 г.
10. В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе. Препринт Е2-5141, Дубна (1970).
11. А. Н. Квинихидзе, Б. Л. Марковски, Д. Ц. Стоянов, А. Н. Тавхелидзе. ТМФ, 6, 166 (1971); А. Н. Квинихидзе, Х. Д. Попов, Д. Ц. Стоянов, А. Н. Тавхелидзе. ТМФ, 9, 190 (1971).
12. П. Н. Боголюбов. Препринт Р2-5684, Дубна (1971).
13. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов. Краткие сообщения по физике, № 5, 27, 33 (1971); J. Math. Phys., 14, N2 (1973); Phys. Rev., 2D, 1371 (1970).
14. Y. Nambu. Symmetries in Quark Models. Gordon and Breuch, New York, 1970.
15. G. Frye. Veshiva Univ. Preprint, 1970.