

УРАВНЕНИЯ ТИПА ДАЙСОНА ДЛЯ ВОЛН В ОПТИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Часть I. Линейные задачи

О. Е. Дьяков

Введение. В настоящей работе развит аппарат теории возмущений, подобный методу функций Грина /1,2/, для уравнений

$$L_1 A_1 = \gamma_1 A_3(\theta) A_2 \exp(i\Delta z), \quad L_2 A_2 = \gamma_2 A_3^*(\theta) A_1 \exp(-i\Delta z), \quad (I)$$

$$A_1(z=0) = A_{10}(t), \quad A_2(z=0) = 0, \quad (2)$$

$$L_i = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_i} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_i \quad (i = 1, 2), \quad \theta = t - z/u_3, \quad z > 0,$$

которые описывают параметрическое усиление и вынужденное рассеяние света в общем случае немонохроматической накачки /3-5/; последнее считаем в дальнейшем гауссовской случайной волной с произвольной формой спектра

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau,$$

причем

$$\langle A_3(t) \rangle = 0, \quad \langle A_3(t) A_3(t + \tau) \rangle = 0,$$

$$\langle A_3^*(t) A_3(t + \tau) \rangle = K(\tau).$$

Нижне исходя из (I) получены и решены в общем виде уравнения, аналогичные уравнениям Дайсона в квантовой электродинамике, описывающие средние амплитуды и средние интенсивности волн в первом приближении теории возмущений (или приближении Бурре /1/).

Показано, что в предельном случае δ - коррелированной накачки эти уравнения переходят в уравнения для средних, найденные ранее в фоккер-планковском приближении /4/.

Средние амплитуды. Проведя формальное разложение амплитуд A_1 и A_2 в ряд по степеням амплитуды накачки, нетрудно убедиться, что при граничных условиях (2) ряд для A_1 будет содержать только четные степени A_3 , а ряд для A_2 - только нечетные. Таким образом, $\bar{A}_2 = 0$.

Найдем теперь уравнение, определяющее \bar{A}_1 . Представив амплитуды в виде суммы среднего значения и флуктуации, $A_1 = \bar{A}_1 + \tilde{A}_1$, $A_2 = \bar{A}_2$, получим из (I) точные уравнения

$$L_1 \bar{A}_1 = \gamma_1 \exp(i\Delta z) \bar{A}_3 \bar{A}_2, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 \tilde{A}_1 &= \gamma_1 \exp(i\Delta z) (A_3 \bar{A}_2 - \bar{A}_3 \bar{A}_2), \\ L_2 \tilde{A}_2 &= \gamma_2 \exp(-i\Delta z) (A_3 \bar{A}_1 + \bar{A}_3 \tilde{A}_1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Используя (4), ищем флуктуации амплитуд как функции \bar{A}_1 и A_3 методом последовательных приближений, полагая

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^{(2)} + \tilde{A}_1^{(4)} + \dots, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^{(1)} + \tilde{A}_2^{(3)} + \dots$$

и

$$L_2 \tilde{A}_2^{(1)} = \gamma_2 \exp(-i\Delta z) A_3^2 \bar{A}_1, \quad (5)$$

$$L_1 \tilde{A}_1^{(2)} = \gamma_1 \exp(i\Delta z) \left(A_3 \tilde{A}_2^{(1)} - \bar{A}_3 \bar{A}_2^{(1)} \right),$$

$$L_2 \tilde{A}_2^{(3)} = \gamma_2 \exp(-i\Delta z) A_3^2 \tilde{A}_1^{(2)},$$

$$L_1 \tilde{A}_1^{(4)} = \gamma_1 \exp(i\Delta z) \left(A_3 \tilde{A}_2^{(3)} - \bar{A}_3 \bar{A}_2^{(3)} \right)$$

и т.д. В первом приближении, согласно (5),

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2^{(1)} &= \gamma_2 \exp(-i\Delta z) \int_0^z \exp(i\Delta z_1 - \delta_2 z_1) \times \\ &\quad \times A_3(\theta - z_1) \nu_{23} \bar{A}_1(t - z_1/u_2, z - z_1) dz_1, \\ (\nu_{13} &= 1/u_1 - 1/u_3, \quad i = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив (6) в (3), получим для $\bar{A}_1(t, z)$ искомое интегро-дифференциальное уравнение

Как легко видеть, в предельном случае δ -коррелированной накачки (7) переходит в уравнение (5а) работы /4/

$$\left(L_1 - \frac{\delta_1 \delta_2^S}{2c |v_{23}|} \right) \bar{A}_1 = 0, \quad \text{если} \quad K(\tau) = \frac{S}{c} b(\tau).$$

В случае $A_{10}(t) = A_{10} \exp(i\omega t)$ стационарное решение для (7) имеет вид

$$\bar{A}_1(t, z) = \frac{A_{10}}{2\pi} \exp(i\omega t + i\Delta z/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikz) dk}{v_{13} h_1 - v_{23}^{-1} \delta_1 \delta_2 \int_0^{\infty} \exp(-h_2 \tau) K(\tau) d\tau}, \quad (8)$$

где

$$h_1 = v_{13}^{-1} (\delta_1 - ik + i\omega/u_1 + i\Delta/2), \quad h_2 = v_{23}^{-1} (\delta_2 - ik + i\omega/u_2 - i\Delta/2).$$

Средние интенсивности. Приближенное значение средней интенсивности холостой волны $\bar{I}_2 = \langle A_2 A_2^* \rangle$ можно искать, например, используя (6) и (8) и полагая $\bar{I}_2 \approx \langle \hat{A}_2^{(1)} \hat{A}_2^{(1)*} \rangle$ (ср. /6/). Однако, гораздо более точная оценка, переходящая в пределе $K(\tau) \sim b(\tau)$ в значение \bar{I}_2 в фоккер-планковском приближении /4/, получится, если исходить из точных динамических уравнений для квадратичных величин и при их решении использовать алгоритм, аналогичный описанному выше.

Пусть опять $A_{10}(t) = A_{10} \exp(i\omega t)$. Полагая

$$A_1 = \exp(i\omega t + i\Delta z/2) \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \exp(-ikz) dk,$$

$$A_1^* = \exp(-i\omega t - i\Delta z/2) \int_{-\infty}^{\infty} x_3 \exp(-ik'z) dk',$$

$$A_2 = \exp(i\omega t - i\Delta z/2) \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \exp(-ikz) dk,$$

$$A_2^* = \exp(-i\omega t + i\Delta z/2) \int_{-\infty}^{\infty} x_4 \exp(-ik'z) dk'$$

И $x_5 = x_1 x_3$, $x_6 = x_2 x_3$, $x_7 = x_1 x_4$, $x_8 = x_2 x_4$, получим, учитывая граничные условия в виде соответствующей правой части /4/,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + h_1 x_1 &= \nu_{13}^{-1} \delta_{13} A_3(\theta) x_2 + (2\pi \nu_{13})^{-1} A_{10}, \\ \dot{x}_2 + h_2 x_2 &= \nu_{23}^{-1} \delta_{23} A_3^*(\theta) x_1, \\ \dot{x}_3 + h_3 x_3 &= \nu_{13}^{-1} \delta_{13} A_3^*(\theta) x_4 + (2\pi \nu_{13})^{-1} A_{10}^*, \\ \dot{x}_4 + h_4 x_4 &= \nu_{23}^{-1} \delta_{23} A_3(\theta) x_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

И

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_5 + h_5 x_5 &= \nu_{13}^{-1} \delta_{13} A_3(\theta) x_6 + \nu_{13}^{-1} \delta_{13} A_3^*(\theta) x_7 + \\ &+ (2\pi \nu_{13})^{-1} A_{10} x_3 + (2\pi \nu_{13})^{-1} A_{10}^* x_1, \\ \dot{x}_6 + h_6 x_6 &= \nu_{23}^{-1} \delta_{23} A_3^*(\theta) x_5 + \nu_{13}^{-1} \delta_{13} A_3^*(\theta) x_8 + (2\pi \nu_{13})^{-1} A_{10} x_2, \\ \dot{x}_7 + h_7 x_7 &= \nu_{13}^{-1} \delta_{13} A_3(\theta) x_8 + \nu_{23}^{-1} \delta_{23} A_3(\theta) x_5 + (2\pi \nu_{13})^{-1} A_{10} x_4, \\ \dot{x}_8 + h_8 x_8 &= \nu_{23}^{-1} \delta_{23} A_3^*(\theta) x_7 + \nu_{23}^{-1} \delta_{23} A_3(\theta) x_6, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где точка означает дифференцирование по θ ,

$$h_3 = \nu_{13}^{-1} (\delta_{13} - ik' - i\omega/u_1 - i\Delta/2), \quad h_4 = \nu_{23}^{-1} (\delta_{23} - ik' - i\omega/u_2 + i\Delta/2),$$

$$h_5 = h_1 + h_3, \quad h_6 = h_2 + h_3, \quad h_7 = h_1 + h_4, \quad h_8 = h_2 + h_4.$$

Чтобы получить уравнения первого приближения, полагаем в (9) и (10) $x_m = \bar{x}_m$ ($m = 1, 3, 5, 8$) и $x_m = \tilde{x}_m$ ($m = 2, 4, 6, 7$). В результате для стационарного режима будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{x}_5 &= \frac{|A_{10}|^2}{(2\pi)^2} \frac{h_8 \nu_{13}^{-1} \delta_{13} c_3 - c_4 (h_8 - \nu_{23}^{-1} \delta_{23} c_1)}{c_5}, \\ \bar{x}_8 &= \frac{|A_{10}|^2}{(2\pi)^2} \frac{c_2 c_4 + c_3 h_5}{c_5} \nu_{23}^{-1} \delta_{23}, \end{aligned}$$

где

$$c_1 = \nu_{13}^{-1} \delta_{13} \int_0^{\infty} [\exp(-h_6 \tau) + \exp(-h_7 \tau)] K(\tau) d\tau,$$

$$C_2 = \nu^{-1} \delta_2 \int_0^{\infty} [\exp(-h_6 \tau) + \exp(-h_7 \tau)] K(\tau) d\tau,$$

$$C_3 = \nu^{-1} \nu^{-1} \delta_2 \times \left[\frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-h_6 \tau - h_2 \tau') K(\tau + \tau') d\tau d\tau'}{h_1 - \nu^{-1} \nu^{-1} \delta_1 \delta_2 \int_0^{\infty} \exp(-h_2 \tau) K(\tau) d\tau} + \right. \\ \left. + \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-h_7 \tau - h_4 \tau') K(\tau + \tau') d\tau d\tau'}{h_3 - \nu^{-1} \nu^{-1} \delta_1 \delta_2 \int_0^{\infty} \exp(-h_4 \tau) K(\tau) d\tau} \right],$$

$$C_4 = \frac{\nu^{-2}}{h_3 - \nu^{-1} \nu^{-1} \delta_1 \delta_2 \int_0^{\infty} \exp(-h_4 \tau) K(\tau) d\tau} + \\ + \frac{\nu^{-2}}{h_1 - \nu^{-1} \nu^{-1} \delta_1 \delta_2 \int_0^{\infty} \exp(-h_2 \tau) K(\tau) d\tau},$$

$$C_5 = h_5 h_8 - \nu^{-1} \nu^{-1} \delta_1 \delta_2 (h_5 + h_8) \int_0^{\infty} [\exp(-h_6 \tau) + \exp(-h_7 \tau)] K(\tau) d\tau.$$

Средние интенсивности волны могут быть вычислены теперь как

$$\bar{I}_1(z) = \iint_0^{\infty} \exp[-i(k + k')z] \bar{I}_5 dk dk',$$

$$\bar{I}_2(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k + k')z] \bar{I}_8 dk dk'. \quad (\text{II})$$

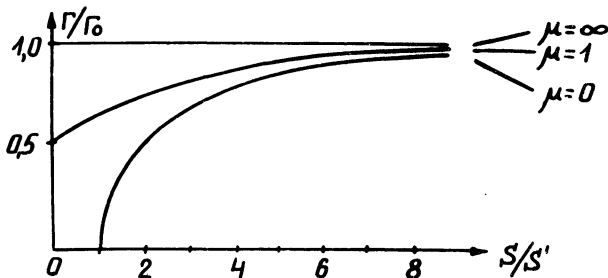
Оценка инкрементов. Можно предположить, что инкременты Γ определяются полюсами подынтегральных выражений в (8) и (II). Соответственно, получим следующие характеристические уравнения относительно Γ : для средних амплитуд

$$\nu_{13}h_1' - \nu_{23}^{-1}\nu_{12} \int_0^{\infty} \exp(-h_2'\tau)K(\tau)d\tau = 0,$$

для средних интенсивностей

$$h_5'h_8' - \nu_{13}^{-1}\nu_{23}^{-1}\nu_{12}(h_5' + h_8') \int_0^{\infty} [\exp(-h_6'\tau) + \exp(-h_7'\tau)]K(\tau)d\tau = 0, \quad (12)$$

в которых $h_1' = h_1(-ik = -ik' = \Gamma/2)$.



Р и с. I. Зависимость инкремента ВКР от интенсивности накачки при различных значениях параметра μ .

В случае вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) при лоренцевской форме линии накачки $K(\tau) = \bar{I}_{HO} \exp(-\Delta\omega_H \tau/2)$ и уравнение (II) принимает вид

$$\Gamma/\Gamma_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1+\mu}{x} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1+\mu}{x} \right)^2 + \frac{\mu}{x}},$$

где $\Gamma_0 = \varepsilon \bar{I}_{HO}$ - статический инкремент ВКР, $\mu = \Delta\omega_0/\Delta\omega_H$ - отношение ширины нормальной линии КР и линии накачки, $x = S/S'$, $S'_z = 4c\nu_{13}\varepsilon^{-1}$ и S - спектральная интенсивность накачки в центре линии (см. рис. I).

Аналогичный подход, развитый для нелинейных задач, будет рассмотрен в другой работе. Здесь отметим, что с учетом уравнения для амплитуды накачки

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{u_3} \frac{\partial A_3}{\partial t} + \delta_3 A_3 = -\gamma_3 A_1 A_2^*, \quad A_3(z=0) = A_{30}(t),$$