Краткие сообщения по физике № 4 апрель 1975

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОТОК НЕЙТРОНОВ ОТ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА В ЗАМЕДЛИТЕЛЕ, СОДЕРЖАЩЕМ БЕСКОНЕЧНУЮ ЩЕЛЬ

К. Д. Илиева, М. В. Казарновский

Расчет переноса нейтронов от импульсного источника в системе из двух пластин замедлителя, разделенных плоской щелью с шириной большей или порядка длины диффузии, при больших временах связан с громоздкими вычислениями. Для проверки точности различных приближений таких расчетов важно иметь аналитическое выражение для нейтронного распределения в предельном случае больших времен. В настоящей работе эта задача решена в частном случае толстого замедлителя, содержащего бесконечную щель с шириной $2b$, в центре которой расположен импульсный моноэнергетический плоский источник нейтронов, вылетающих под углом $\theta_s = \arccos\mu_s$, со скоростью $v_s = 1$ ж), в следующих предположениях: I) среднее время блуждания нейтрона в замедлителе много меньше времени его пролета в полости; 2) спектр нейтронов, выходящих из замедлителя в полость, не зависит от спектра нейтронов, падающих из полости на границу замедлителя; 3) рассеяние изотропно.

В рамках этих предположений в приближении постоянных сечений поток нейтронов $N^-(\mu,v,t)$ со скоростью v, вылетающих под углом $\theta = \arccos\mu$ в момент времени t из замедлителя в полость, определяется уравнением жж)

ж) Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что скорость нейтронов измеряется в единицах $\sqrt{2k_B T/m}$, где k_B – постоянная Больцмана, T – температура замедлителя и m – масса нейтрона.

жж) Применимость такой модели и вывод уравнения (I) для аналогичной задачи со сферической полостью обсуждались ранее /2/.

$$N^-(\mu,v,t) = k(v)\int_0^\infty dv' \int_0^1 d\mu' K(\mu'\to\mu) N^-\left(\mu',v',t-\frac{2b}{v'\mu'}\right) +$$
$$+ k(v)K(\mu_s\to\mu)\delta\left(t-\frac{b}{\mu_s}\right). \qquad (I)$$

Здесь $k(v)$ – нормированный на единицу спектр выходящих нейтронов; для плоского слоя толщиной $H > L/2$ (L – длина диффузии)

$$K(\mu'\to\mu) = \frac{c\mu}{2(1-c)(\nu_o+\mu)(\nu_o+\mu')X(-\mu)X(-\mu')} \times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\mu+\mu'} - \frac{2\nu_o}{(\nu_o-\mu)(\nu_o-\mu')\left\{\exp\left[2(2z_o+H)/\nu_o\right]-1\right\}}\right\}, \qquad (2)$$

где c – среднее число вторичных нейтронов на столкновение; $\nu_o = L/l$; l – полный свободный пробег; z_o – экстраполированная граница; вид функции $X(\mu)$ см., напр., в /I/.

После преобразования Лапласа уравнение (I) принимает вид:

$$N^-(\mu,v,\lambda) = k(v)\int_0^\infty dv' \int_0^1 d\mu' K(\mu'\to\mu) N^-(\mu',v',\lambda)\exp(-2b\lambda/v'\mu') +$$
$$+ k(v)K(\mu_s\to\mu)\exp(-b\lambda/\mu_s), \qquad (3)$$
$$N^-(\mu,v,\lambda) = \int_0^\infty dt\exp(-\lambda t)N^-(\mu,v,t).$$

Сначала рассмотрим задачу в односкоростном приближении, считая поток выходящих из замедлителя нейтронов изотропным

$$k(v) = \delta(v-1),\quad K(\mu_s\to\mu) = 2k_o\mu,$$

где k_o – среднее альбедо /2/. Тогда решение уравнения (3) можно представить в виде

$$N^-_{\text{пр}}(\mu,t) = 2k_o\mu\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp\left[\lambda(t-b/\mu_s)\right]d\lambda}{1-a(2b\lambda)}, \qquad (4)$$

$$a(x) = 2k_o\int_0^1 \mu\exp(-x/\mu)d\mu =$$
$$= k_o\left\{e^{-x}(1-x) - x^2\left[0{,}5772 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!n}\right] - x^2\ln x\right\}. \qquad (5)$$

Для потока нейтронов при асимптотически больших $B = (t - b/\mu_s)/2b$ (т.е. для $x \to 0$) имеем

$$N^{-}_{np}(\mu,B)_{B\to\infty} = \frac{\mu}{b} k_o^2 \int_0^\infty \frac{x^2 \exp(-Bx)dx}{(1 - k_o)^2} = \frac{2\mu k_o^2}{b(1 - k_o)^2 B^3}. \quad (6)$$

В предположении максвелловского распределения $k(v) \equiv M(v) = 2v^3\exp(-v^2)$ выражение для потока нейтронов $N^{-}_{np}(\mu,v,t)$ при $B \to \infty$ описывается выражением, аналогичным (4), с заменой $a(2b\lambda)$ на $a'(2b\lambda)$, где

$$a'(x) \simeq 2k_o \int_0^\infty dv v^3 \exp(-v^2) \left[1 - \frac{2x}{v} - \left(\frac{x}{v}\right)^2 \ln \frac{x}{v}\right] =$$

$$= k_o(1 - \sqrt{\pi}x - x^2\ln x) + O(x^2). \quad (7)$$

Выражение (7) отличается от (5) членами, которые не влияют на асимптотическое поведение нейтронного потока. Таким образом, учет энергетической зависимости потока выходящих из замедлителя нейтронов не сказывается на асимптотическом распределении.

Выше предполагалась изотропия распределения нейтронов, выходящих из замедлителя. Однако, в отличие случая сферической полости, рассмотренной раньше /2/, при прохождении нейтронов через плоскую щель под скользящими углами, казалось бы, анизотропия углового распределения должна заметно влиять на временную зависимость нейтронного потока. Действительно, согласно (2), при $\mu, \mu' \to 0$ функция $K(\mu' \to \mu)$ имеет вид

$$K(\mu' \to \mu) = \frac{c}{2} \frac{\mu}{\mu + \mu'}. \quad (8)$$

(Здесь учтено, что $X(0) = 1/\nu_o\sqrt{1 - c}$), т.е. именно в этой области распределение выходящих нейтронов существенно зависит от углового распределения падающих. Однако, можно показать в односкоростном приближении, что этот эффект может лишь изменить угловое распределение асимптотического потока, не изменяя его временную зависимость.

Действительно, решение уравнения (3) методом итераций можно записать в виде

$$N^-(\mu,v,\lambda) = \exp(-b\lambda/\mu_s) \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mu_n \to \mu,\ 2b\lambda), \tag{9}$$

$$K_n(\mu_s \to \mu, x) = \int_0^1 d\mu_1 \int_0^1 d\mu_2 \ldots \int_0^1 d\mu_n K(\mu_1 \to \mu) \ldots \times$$
$$\times K(\mu_n \to \mu_{n-1}) K(\mu_s \to \mu_n) \exp\left[-x(1/\mu_1 + \ldots + 1/\mu_n)\right], \tag{10}$$
$$K_0(\mu_s \to \mu, x) = K(\mu_s \to \mu).$$

Соответственно

$$N^-(\mu,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} d\lambda \exp\left[(t - b/\mu_s)\lambda\right] \tilde{K}(\mu_s \to \mu,\ 2b\lambda)$$

$$\tilde{K}(\mu_s \to \mu, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mu_s \to \mu, x).$$

Можно показать, что в интересующей нас области асимптотически больших t (т.е. при $\lambda \to 0$) функцию $\tilde{K}(\mu_s \to \mu, x)$ можно представить в виде

$$\tilde{K}(\mu_s \to \mu, x) = \tilde{K}(\mu_s \to \mu, 0) + x \left[\frac{\partial \tilde{K}(\mu_s \to \mu, x)}{\partial x}\right]_{x=0} +$$
$$+ \frac{x^2 \ln x}{2} \left[\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{K}(\mu_s \to \mu, x)}{\partial x^2}\right]_{x=0} + o(x^2).$$

Поэтому

$$N^-(\mu,t) = -A(\mu_s \to \mu) \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} d\lambda \exp\left[(t - b/\mu_s)\lambda\right] (2b\lambda)^2 \ln(2b\lambda) =$$
$$= \frac{\mu}{2bB^3} A(\mu_s \to \mu). \tag{11}$$

Учитывая (8), после некоторых преобразований имеем

$$A(\mu_s \to \mu) = -\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln x} \frac{\partial^2 \tilde{K}(\mu_s \to \mu, x)}{\partial x^2}\right] =$$
$$= -\lim_{x \to 0} \int_0^1 d\mu' \frac{\exp(-x/\mu')}{\mu'^2 \ln x} \tilde{K}(\mu_s \to \mu', 0) \tilde{K}(\mu' \to \mu, 0). \tag{12}$$

Функция $K(\mu_s \to \mu, 0)$, как нетрудно убедиться, является решением уравнения (3) в односкоростном приближении при $\lambda = 0$, т.е. описывает поток в случае стационарной диффузии нейтронов от плоского источника вида $[\delta(\mu - \mu_s) + \delta(\mu + \mu_s)]\delta(v - 1)$ в однородном бесконечном замедлителе. Асимптотическое выражение для потока нейтронов в этом случае известно (/I/, стр. II7), причем $\tilde{K}(\mu_s \to \mu, 0)$ можно представить в виде

$$\tilde{K}(\mu' \to \mu, 0) = \frac{c^2\nu_0^2}{2N_{0+}(\nu_0 - \mu')(\nu_0 + \mu')(\nu_0 + \mu)} +$$

$$+ c^2\nu_0^2 P \int_0^1 \frac{\nu d\nu}{(\nu - \mu')(\nu + \mu')(\nu + \mu)N(\nu)}, \quad (I3)$$

$$N_{0+} = \frac{c}{2}\nu_0^3\left[\frac{c}{\nu_0^2 - 1} - \frac{1}{\nu_0^2}\right], \; N(\nu) = \left[(1 - \nu c \operatorname{Arth}\nu)^2 + c^2\pi^2\nu^2/4\right]$$

(символ P означает главное значение в смысле Коши). Подставляя (I2) и (I3) в (II), получим

$$N^-(\mu, B)_{B\to\infty} = \frac{c^2\mu}{4bB^3}\left[\frac{c\nu_0}{2(\nu_0 + \mu)N_{0+}} + \frac{c}{2}\int_0^1 \frac{\nu d\nu}{(\nu + \mu)N(\nu)} + \frac{1}{\mu}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{c\nu_0^2}{(\nu_0 + \mu_s)(\nu_0 - \mu_s)N_{0+}} + cP\int_0^1 \frac{\nu d\nu}{N(\nu)(\nu + \mu_s)(\nu - \mu_s)}\right]. \quad (I4)$$

В практически наиболее интересном случае изотропного (по потоку) источника при $1 - c \ll 1$ имеем

$$N^-(\mu, B)_{B\to\infty} = \frac{2\mu}{bB^3(1 - k_0)^2}\left\{1 + \frac{2}{3\nu_0}\left[-0{,}0805 + I(\mu) + \frac{3}{2}\mu + \frac{1}{\mu}\right]\right\},$$

$$I(\mu) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\nu d\nu}{(\nu + \mu)N(\nu)},$$

т.е. с точностью до членов порядка $(1 - k_0)$ выражение (I5) совпадает с приближенным выражением (6).

Из всего сказанного следует, что угловая и энергетическая зависимость потока нейтронов, выходящих из замедлителя в полость, относительно слабо сказывается на временной зависимости полного потока при асимптотически больших временах. Поскольку именно при асимптотически больших временах следовало бы ожидать наиболее сильного влияния этих эффектов, полученный результат позволяет надеяться, что прямые численные расчеты нейтронных потоков для конкретных реальных случаев (в частности, с учетом конечности размэров замедлителя) можно в первом приближении проводить в односкоростной модели и в предположении изотропии потока нейтронов, выходящих из замедлителя.

Поступила в редакцию
27 февраля 1973 г.

Литература

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. "Мир", М., 1972 г.
2. К. Д. Ильева, М. В. Казарновский. Атомная энергия, 1973, в печати.