Краткие сообщения по физике № 5 май 1973

УРАВНЕНИЯ ТИПА ДАЙСОНА ДЛЯ ВОЛН В ОПТИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Ю. Е. Дьяков

УДК 621.375.9 : 535 + 535.375

Развит метод анализа процессов, описывающихся нелинейными стохастическими уравнениями. Рассмотрен эффект насыщения вынужденного комбинационного рассеяния, возбуждаемого мощным немонохроматическим полем в свободном пространстве и резонаторе.

ч.2. Нелинейные задачи

I. В настоящей работе метод уравнений Дайсона, развитый ранее /I/ применительно к линейным задачам теории взаимодействия случайных волн, обобщается на нелинейные задачи. Метод использован здесь для анализа процесса вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) в свободном пространстве и в резонаторе при шумовой накачке с произвольной шириной спектра. Для этого случая получено и исследовано уравнение, описывающее среднее поле стоксовой волны при ВКР-вперед и справедливое как в линейной области экспоненциального усиления, так и при насыщении.

Использована следующая схема вывода уравнений для средних. Предположим, что искомая случайная функция $x = \bar{x} + \tilde{x}$ ($\tilde{x}$ -флуктуация) удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\hat{L}x = \hat{N}(x) + f, \qquad (I)$$

где $\hat{L}$ - линейный регулярный (не случайный) оператор, $\hat{N}$ - нелинейный оператор. Заданная случайная функция ξ (например, комплексная амплитуда накачки в начале области взаимодействия) может входить в $\hat{N}$, в граничные или начальные условия для x, или в функцию f, которая от x не зависит. Уравнение (I) эквивалентно двум уравнениям

$$\hat{L}\bar{x} = \langle \hat{N}(\bar{x} + \tilde{x}) \rangle + \bar{f}, \tag{2а}$$

$$\hat{L}\tilde{x} = \hat{N}(\bar{x} + \tilde{x}) - \langle \hat{N}(\bar{x} + \tilde{x}) \rangle + \tilde{f}. \tag{2б}$$

Предлагаемый метод решения уравнения (2а) основан на представлении $\langle \hat{N} \rangle$ в виде ряда $\langle \hat{N}(\bar{x} + \tilde{x}) \rangle = \sum\limits_n N^{(n)}(\bar{x})$, члены которого являются линейными функционалами относительно корреляционных функций процесса ξ возрастающего порядка, т.е. $\hat{N}^{(n)} \sim \sim \langle \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \rangle$. Для определения конкретного вида операторов $\hat{N}^{(n)}$ используем флуктуационное уравнение (2б), отыскивая его решение в виде ряда теории возмущений

$$\tilde{x} = \tilde{x}^{(1)} + \tilde{x}^{(2)} + \ldots, \quad \tilde{x}^{(n)} \sim \xi^n,$$

причем искомая величина $\bar{x}$ рассматривается в (2б) как неизвестный переменный параметр. В результате уравнение (2а) принимает вид

$$\hat{L}\bar{x} = \sum_n \hat{N}^{(n)}(\bar{x}) + \bar{f}. \tag{3}$$

Если, в частности, оператор $\hat{N}$ линеен, то $\hat{N}^{(n)}(\bar{x}) = \hat{Q}^{(n)}\bar{x}$, и (3) переходит в уравнение Дайсона $\hat{L}\bar{x} = \hat{Q}\bar{x} + \bar{f}$, также линейное относительно $\bar{x}$; в этом случае $\hat{Q} = \sum\limits_n \hat{Q}^{(n)}$ является аналогом массового оператора.

В первом приближении, которому в линейных задачах соответствует приближение Бурре (I), уравнение (3) имеет вид

$$\hat{L}\bar{x} = \hat{N}^{(2)}(\bar{x}) + \bar{f}, \tag{4}$$

где $\hat{N}^{(2)}$ линейным образом выражается через корреляционную функцию $K = \langle \xi_1 \xi_2 \rangle$ случайного процесса ξ.

2. Изложенный метод непосредственно обобщается на систему уравнений типа (I). Например, в случае ВКР-вперед исходные динамические уравнения для комплексных амплитуд накачки A_3, стоксовой волны A_I и молекулярных колебаний A_2 записываются как

$$\hat{L}_1 A_1 = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1\right) A_1 = \beta_1 A_3 A_2^*,$$

$$\hat{L}_2 A_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + h_2\right) A_2 = \beta_2 A_3 A_1^*, \tag{5}$$

$$\hat{L}_3 A_3 = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_3}\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_3\right) A_3 = -\beta_3 A_1 A_2,$$

$$A_1(z=0) = A_{10}, \quad A_3(z=0) = \xi(t);$$

в дальнейшем $\xi(t)$ считается случайным стационарным гауссовским процессом с нулевым средним, корреляционной функцией $K(\tau)$ и спектральной плотностью $G(\omega) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau$.

Как следует из (5), A_I является четной функцией ξ, а A_2 и A_3 – нечетными, т.е. как и в аналогичной линейной задаче /I/ в (5) можно положить $A_1 = \bar{A}_1 + \tilde{A}_1$, $A_2 = \tilde{A}_2$ и $A_3 = \tilde{A}_3$. Уравнение первого приближения для $\bar{A}_1$, аналогичное уравнению (4), будет

$$\hat{L}_1\bar{A}_1 = \beta_1 \langle \tilde{A}_3^{(1)} \tilde{A}_2^{(1)*} \rangle, \tag{6}$$

причем

$$\hat{L}_2\tilde{A}_2^{(1)} = \beta_2 \bar{A}_1^* \tilde{A}_3^{(1)}, \qquad \hat{L}_3\tilde{A}_3^{(1)} = -\beta_3 \bar{A}_1 \tilde{A}_2^{(1)}. \tag{7}$$

При стационарных условиях рассеяния среднее значение амплитуды стоксовой волны от времени не зависит, $\bar{A}_1 = \bar{A}_1(z)$, так что точные решения уравнения (7) могут быть найдены в аналитической форме с помощью, например, спектральной методики. Подставив результат в (6), получим искомое уравнение для средней амплитуды

$$\frac{dJ}{dz} + 2\alpha_1 J = \exp(-2\alpha_3 z) g_1 J \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-g_3 F(\omega)\int\limits_0^z J(z')dz'\right] G(\omega)F(\omega)d\omega, \tag{8}$$

в котором $J = |\bar{A}(z)|^2$, $g_1 = 2\beta_1\beta_2 h_2^{-1}$, $g_3 = 2\beta_3\beta_2 h_2^{-1}$, $F(\omega) = h_2^2(h_2^2 + \omega^2)^{-1}$.

3. Из (5) следует, что средние интенсивности волн в среде без потерь при стационарной накачке с произвольным спектром удовлетворяют закону сохранения $\bar{I}_1(z) - (\omega_1/\omega_3)\bar{I}_3(z) = \mathrm{const}$, которым определяется максимальная интенсивность стоксовой волны

$$\bar{I}_{1(\max)} = \langle A_1 A_1^* \rangle_{(\max)} = |A_{10}^2| + (\omega_1/\omega_3)\bar{I}_3(0).$$

С другой стороны, используя (8) можно показать, что величина $J(z)$ также стремится к $\bar{I}_{1(\max)}$ ж). Это означает, что вся мощность шумового возбуждающего излучения перекачивается в конечном счете в бесконечно-узкую линию, положение которой определяется частотой монохроматической затравки. Иначе говоря, в режиме насыщения спектр стоксовой компоненты ВКР начинает сужаться, стягиваясь к частоте затравки. Этот эффект должен заметно проявляться при длинах взаимодействия

$$z > z' = \frac{\ln\left[|A_{10}^2|/\bar{I}_3(0)\right]}{g_1\bar{I}_3(0)}\left(1 + \frac{\Delta\omega_H}{\Delta\omega_0}\right), \qquad (9)$$

где $\Delta\omega_H$ - ширина спектра накачки, $\bar{I}_3(0)$ - ее средняя интенсивность, $|A_{10}^2|$ - интенсивность монохроматической затравки. Оценка (9) следует из решения уравнения (8) в линейном приближении

$$J(z) = |A_{10}^2| \exp\left[g_1 z \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)F(\omega)d\omega\right] =$$

$$= |A_{10}^2| \exp\left[g_1\bar{I}_3(0)z\left(1 + \frac{\Delta\omega_H}{\Delta\omega_0}\right)^{-1}\right],$$

в согласии с результатом работы /2/, где было показано, что усиление средней амплитуды определяется той частью спектра накачки, которая заключена в линии $\Delta\omega_0 = 2h_2$ спонтанного КР.

4. ВКР в кольцевом резонаторе. Если интересоваться достаточно медленными переходными процессами, при которых $\bar{A}_1(t,z)$

ж) Уравнение (8) при $\alpha_{1,3} = 0$ элементарно интегрируется, если перейти к новой независимой переменной $\zeta = \int_0^z J dz$, и из решения видно, что $\lim_{\zeta\to\infty} J = \lim_{z\to\infty} J = \bar{I}_{1(\max)}$.

мало меняется за время $T_2 = h_2^{-1}$, то для $J = |\bar{A}_1(t,z)|^2$ можно получить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial J}{\partial t} + 2\alpha_1 J =$$
$$= \exp(-2\alpha_3 z) g_1 J \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-g_3 F(\omega)\int_0^z J dz'\right] G(\omega)F(\omega)d\omega. \quad (10)$$

Квантовую эффективность ВКР-генератора будем характеризовать величиной

$$\eta = 2(1 - R)\frac{\omega_3}{\omega_1}(J/\bar{I}_3(0)).$$

Предполагая коэффициенты отражения зеркал R близкими к единице, а распределение J по длине $0<z<L$ резонатора приблизительно постоянным $\left(\int_0^L J dz \simeq JL\right)$, можно с помощью описанной в /3/ общей методики получить следующее уравнение для η:

$$T\dot{\eta} + \eta = 1 - \bar{I}_3^{-1}(0)\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp\left[-2qF(\omega)\eta\right]d\omega, \quad (11)$$

$$T = \frac{1 - R}{L/u_1}, \quad 2q = \frac{g_1\bar{I}_3(0)L}{2(1 - R)}, \quad g_3 JL = 2q\eta.$$

Как следует из (11), пороговое значение при шумовой накачке равно $I_{пор} = 2(1 - R)(1 + \Delta\omega_H/\Delta\omega_0)(g_1 L)^{-1}$, причем на начальном этапе генерации $\eta(t) = \eta(0)\exp[(N - 1)t/T]$, где $N = \bar{I}_3(0)/I_{пор}$ – превышение накачки над порогом. Оценим условия, необходимые для достижения максимального квантового выхода ($\eta \approx 1$).

Спектр накачки удобно аппроксимировать функцией

$$G(\omega) = \frac{\bar{I}_3(0)}{\pi h_2}\frac{p^{-1}\mathrm{sh}\,p}{I_0(p) + I_1(p)}\frac{1 - \exp[-2pF(\omega)]}{1 - \exp(-2p)}, \quad (12)$$

в которой безразмерный параметр p выбирается так, чтобы получить нужное значение для ширины спектра накачки,

$$\frac{\Delta\omega_H}{\Delta\omega_0} = \left(\frac{2p - \ln\dfrac{2}{1 + \exp(-2p)}}{\ln\dfrac{2}{1 + \exp(-2p)}}\right)^{1/2} = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{\ln 2}{2|p|}} & (p<0,\ |p|\gg 1),\\ 1 & (p = 0),\\ \sqrt{\dfrac{2p}{\ln 2}} & (p\gg 1).\end{cases}$$

Представление (I2) позволяет точно вычислить интеграл в правой части уравнения (II), которое в результате принимает вид

$$T\dot{\eta} + \eta = 1 - \varphi(p, \eta q), \qquad (I3)$$

где

$$\varphi(p,q) = \frac{e^{-q}}{p}\,\frac{(p + q)\left[I_0(p + q) + I_1(p + q)\right] - qe^{p}\left[I_0(q) + I_1(q)\right]}{I_0(p) + I_1(p)};$$

$I_0(x)$, $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя. Согласно (I3), $\eta \simeq 1$, если $\varphi \ll 1$. При широкополосной накачке $p \gg 1$, и для выполнения неравенства $\varphi \ll 1$ необходимо, чтобы параметр q также был достаточно большим; при этом

$$\eta \simeq 1 + \sqrt{q/p} - \sqrt{1 + q/p} \simeq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{p/q} \qquad (\eta \simeq 1).$$

Таким образом, КПД ВКР-генератора, близкий к 100%, достигается при $q > p$, т.е. при превышении порога генерации в $N > \Delta\omega_н/\Delta\omega_0$ раз.

Следует отметить, что полученные здесь оценки относятся к возбуждению среднего поля. Для средней интенсивности условия, обеспечивающие высокий квантовый выход, могут быть менее жесткими.

Автор благодарен С. А. Ахманову и Ф. В. Бункину за ценную дискуссию.

Поступила в редакцию
6 апреля 1973 года.

Литература

1. Ю. Е. Дьяков. Кр. сообщ. по физике ФИАН, № 4, 23 (1973).
2. Ю. Е. Дьяков. Кр. сообщ. по физике ФИАН, № 7, 49 (1971).
3. Ю. Е. Дьяков, А. И. Ковригин. Квант. электроника, № 4, 86, 1972 г.