Краткие сообщения по физике № 6 июнь 1973

ЧАСТИЦА В ПОЛЕ КВАНТОВАННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. Е. Казаков, М. В. Федоров

УДК 535.I4

Найдены точные волновые функции и спектр системы "электрон в постоянном магнитном поле + квантованная электромагнитная волна".

При рассмотрении вопросов о взаимодействии частиц с интенсивными электромагнитными полями обычно применяется полуклассический подход, что определяется большим числом фотонов. Однако представляет интерес также нахождение стационарных состояний системы электрон + совокупность фотонов (квантованная электромагнитная волна). Эти состояния могут быть полезны как для установления связи между полуклассическим и полностью квантовым описаниями, так при и вычислении вероятностей изменения числа фотонов при рассеянии в электромагнитных полях, сложно зависящих от времени, когда не существует закона сохранения энергии (или квазиэнергии). В работах /I,2/ такая задача решена для электрона в поле квантованной плоской электромагнитной волны, в /3-5/ рассмотрен электрон, движущийся в квантованной монохроматической плоской волне линейной и циркулярной поляризаций и постоянном магнитном поле, направленном вдоль волнового вектора. В настоящей работе найдены точные решения уравнения Клейна-Гордона для частицы в постоянном магнитном поле и квантованной плоской электромагнитной волне произвольного спектрального состава и произвольной поляризации, распространяющейся вдоль магнитного поля.

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)^2 - m^2\right]\Psi = 0 \qquad (I)$$

для частицы с зарядом e в постоянном магнитном поле H, с потенциалом $A^{(H)} = \{-Hx_2, 0, 0, 0\}$ и в поле квантованной электромагнитной волны

$$A_\mu^{(w)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda}\frac{e_\mu^\lambda}{\sqrt{2n\omega V}}\left(c_{\lambda n}e^{i(kx)n} + c_{\lambda n}^{+}e^{-i(kx)n}\right) \qquad (2)$$

Здесь $\lambda = 1,2$, $e_\mu^\lambda = \delta_{\mu\lambda}$ – единичные векторы поляризации фотона, $V = L^3$ – нормировочный объем, $\omega = 2\pi/L$, $k = \{0,0,\omega,i\omega\}$, $(kx) = \vec{k}\vec{x} - k_0x_0$ и принято $c = \hbar = 1$. Операторы $c_{\lambda n}$ и $c_{\lambda n}^{+}$ уничтожения и рождения фотонов удовлетворяют коммутационным соотношениям $[c_{\lambda n}, c_{\lambda' n'}^{+}] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{nn'}$. Для этих операторов будем использовать следующее "координатное" представление:

$$c_{1n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_n - \frac{\partial}{\partial\xi_n}\right),\ c_{1n}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_n + \frac{\partial}{\partial\xi_n}\right),$$

$$c_{2n} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\eta_n - \frac{\partial}{\partial\eta_n}\right),\ c_{2n}^{+} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\eta_n + \frac{\partial}{\partial\eta_n}\right). \qquad (3)$$

Преобразование волновой функции $\Psi = V\Phi$, где

$$V = \exp\left[-i\sum_n n(kx)(c_{1n}^{+}c_{1n} + c_{2n}^{+}c_{2n} + 1)\right], \qquad (4)$$

приводит к уравнению для Φ, не содержащему координат x_1, x_3, x_0, но зависящему от производных $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_3$, $\partial/\partial x_0$, что позволяет искать стационарные состояния $\Phi_a = \exp\left[i(q_1x_1 + q_3x_3 - q_0x_0)\right]\varphi_a$. φ_a является функцией полевых переменных $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ и координаты $y = (x_2 + q_1/eH)$, а квантовые числа q_0 и q_3 являются собственными значениями операторов энергии и проекции импульса на направление H.

Уравнение для функции φ_a принимает вид

$$\hat{h}\varphi_a = h_a\varphi_a,\ h_a = q_0^2 - q_3^2 - m^2, \qquad (5)$$

где

$$\hat{h} = \left(eHy - \sum_n \frac{e\xi_n}{\sqrt{n\omega V}}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} + \sum_n \frac{e}{\sqrt{n\omega V}}\frac{\partial}{\partial \eta_n}\right)^2 -$$

$$- (qk)\sum_n n\left(\xi_n^2 + \eta_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta_n^2}\right). \qquad (6)$$

Так как $\hat{h}$ и h_a зависят от скалярного произведения (qk), удобно ввести новые квантовые числа p_3, p_0

$$q = p - \frac{k}{2(pk)} h_a(pk), \; p^2 + m^2 = 0, \; (qk) = (pk). \qquad (7)$$

Уравнение (7) определяет зависимость энергии q_0 от квантовых чисел p_3, a. Оператор $\hat{h}$ имеет вид оператора Гамильтона системы взаимодействующих осцилляторов. Для его диагонализации рассмотрим классический гамильтониан, получаемый из $\hat{h}$ путем замены $-i\frac{\partial}{\partial y} \to p_y$, $-i\frac{\partial}{\partial \xi_n} \to p_{\xi_n}$, $-i\frac{\partial}{\partial \eta_n} \to p_{\eta_n}$, где p_y, p_{ξ_n}, p_{η_n} – импульсы, канонически сопряженные соответствующим координатам. Приводя теперь этот гамильтониан стандартным образом к нормальным координатам, получим после несложных преобразований следующую систему уравнений:

$$\xi_n = \sqrt{n}\,\frac{e}{\sqrt{\omega V}}\,\frac{\left[-\Omega^2 + \frac{kq}{2}\frac{e^2}{\omega V} - \frac{\pi}{2}\frac{e^2\Omega}{\omega V}\operatorname{ctg}\left|\frac{\pi\Omega}{kq}\right|\right]}{n^2(kq)^2 - \Omega^2}\, y, \qquad (8)$$

$$\sqrt{n}\,\eta_n = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{\omega V}(\Omega^2 - n^2(kq)^2)}\, y,$$

$$\left\{\frac{e^2}{2\omega V}\left[\pi\operatorname{ctg}\left|\frac{\pi\Omega}{kq}\right| - \frac{kq}{\Omega}\right] + \Omega - eH\right\} = 0, \qquad (9)$$

где Ω – характеристические частоты системы, определяемые из дисперсиоонного уравнения (9).

Переход к нормальным координатам w_s осуществляется с помощью следующих формул:

$$\xi_n = \sqrt{n}\,\frac{e(kq)}{\sqrt{\omega V}}\sum_s \frac{\operatorname{sgn}(\Omega_s)\sqrt{|\Omega_s|}}{\sqrt{|m_s|}\,(\Omega_s^2 - n^2(kq)^2)}\, w_s,$$

$$\eta_n = \frac{e}{\sqrt{n\omega V}}\sum_s \frac{|\Omega_s|\sqrt{|\Omega_s|}}{\sqrt{|m_s|}(\Omega_s^2 - n^2(kq)^2)}\, w_s;\ y = \sum_s \frac{w_s}{\sqrt{|m_s\Omega_s|}},$$

$$m_s = \left(3 - 2\frac{eH}{\Omega_s}\right) - \frac{\pi^2}{2}\frac{e^2}{\omega V kq} - 2\frac{\omega V}{e^2(kq)}(\Omega_s - eH)^2. \qquad (10)$$

Индекс s нумерует корни уравнения (9). Оператор $\hat{h}$ и его собственные функции φ_a имеют вид

$$\hat{h} = \sum_s \mathrm{sgn}(m_s)|\Omega_s|\left(w_s^2 - \frac{\partial^2}{\partial w_s^2}\right);\ h_a = \sum_s \mathrm{sgn}(m_s)|\Omega_s|(2n_s + 1)$$

$$\varphi_a = \prod_s N_{n_s}\exp\left(-\frac{w_s^2}{2}\right)H_{n_s}(w_s);\ N_{n_s} = \left[\sqrt{\pi}\, n_s!\, 2^{n_s}\right]^{-1/2};$$

$$n_s = 0,1\ldots;\ a = \{n_s\}, \qquad (11)$$

H_{n_s} – полиномы Эрмита. Согласно (7) и (11)

$$q_0 = p_0 + \sum_s \omega_s\left(n_s + \frac{1}{2}\right);\quad \omega_s = \frac{\mathrm{sgn}(m_s)|\Omega_s|}{p_0 - p_3}, \qquad (12)$$

т.е. энергия представляется в виде суммы энергий, соответствующих отдельным модам. Диагонализация уравнения Дирака производится аналогичным образом и качественно не меняет результаты. Корни уравнения (9) легко найти, учитывая малость параметра $e^2/\omega V(kq)$:

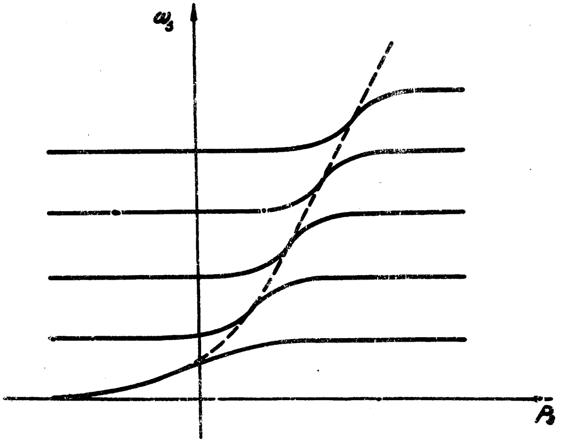
$$\Omega_0 = eH + \frac{1}{2}\frac{e^2}{\omega V}\left[1 - \frac{\pi eH}{(kq)}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi eH}{(kq)}\right];$$

$$\Omega_s = s(kq) - \frac{1}{2}\frac{e^2}{\omega V}\left(s - \frac{eH}{(kq)}\right)^{-1},\quad s = \pm1, \pm2,\ldots \qquad (13)$$

Из (13) видно, что s-я мода сильно взаимодействует с модой Ω_0 вблизи резонанса $eH = s(kq)$ ($\Omega_{0,s} \to \infty$, что свидетельствует о неприменимости разложения), причем остальные моды в этой точке конечны. Учитывая в этой области малость параметров $s - eH/(qk)$ и $s - \lambda$, получаем из (9) следующее приближенное выражение для частот

$$\frac{\Omega}{(qk)} = \frac{1}{2}\left(s + \frac{eH}{(qk)}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(s - \frac{eH}{(qk)}\right)^2 - \frac{2e^2}{\omega V(qk)}}. \qquad (14)$$

Для положительных энергий ($(qk)<0$) вблизи резонанса происходит "расталкивание" мод и изменение их смысла; при переходе через резонансную точку мода, бывшая "магнитной" ($\Omega \approx eH$), непрерывно переходит в "фотонную" ($\Omega \approx s(kq)$), и наоборот. Интересно отметить, что каждая мода играет роль магнитной в проме-



Р и с. I. Качественная зависимость собственных частот ω_s от значения квантового числа p_3 (для $p_0>0$), $s>0$.

жутке между двумя резонансами (см. рис. I). Для отрицательных энергий $(qk)>0$ вблизи каждой резонансной точки возникает область запрещенных значений квантового числа p_3 (или q_3), так как Ω принимает комплексные значения, и φ_a перестает быть нормируемой. Это обстоятельство, нарушающее симметрию между состояниями с противоположными значениями "энергии" p_0 и отмечавшееся в /4,5/ для монохроматической волны, по-видимому, присуще одночастичному подходу. Однако запрещенные области малы, $\Delta p_3 \sim 1/\sqrt{V}$. Поэтому можно думать, что описанные трудности не должны влиять на физические результаты, так как в окончательных формулах (для вероятностей переходов и т.п.) мы можем перейти к пределу $V \to \infty$.

Поступила в редакцию
13 февраля 1973 г.

Литература

1. И. Я. Берсон. ЖЭТФ, 56,1677 (1969).
2. И. Я. Берсон. Изв.АН Латв. ССР, № 3, 3 (1970).
3. И. Я. Берсон. Изв. АН Латв. ССР, № 5, 3 (1969).
4. Д. И. Абакаров, В. П. Олейник. ТМФ, 12,78 (1972).
5. А. Е. Казаков, М. В. Федоров. Краткие сообщения по физике. ФИАН СССР, № 11, 42 (1972).