Краткие сообщения по физике № 6 июнь 1973

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПО ЗАРЯДУ МЕТОДЕ

Д. А. Киржниц, Г. Ю. Крючков

УДК 530.I45

Показано, что в рамках дифференциального по заряду метода уравнение для функции Иоста и граничные условия к нему сохраняют свой обычный вид при наличии связанных состояний.

Получены правила сумм, являющиеся обобщением теоремы Левинсона.

Соответствующие уравнения при наличии одного связанного состояния в двухчастичном канале были выведены в работах /I,2/. Для вывода таких уравнений нужно включить в систему промежуточных состояний рассматриваемые связанные состояния и учесть наличие простых полюсов амплитуды рассеяния в точках связанных состояний.

В случае N связанных состояний с энергиями $E = -E_i$ $(i = 1, 2 \dots N)$ получается система $N + 1$ уравнений, служащая для определения фазы двухчастичного рассеяния и энергий связанных состояний. Приведем эти уравнения в применении к нерялтивистским задачам:

$$\frac{\eta''(E)}{\eta'(E)} = \frac{2E}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta'(E')dE'}{(E'-E)E'} + 2E\sum_{i=1}^{N}\frac{E_i'}{E_i(E+E_i)}, \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{E_i''}{E_i'} - \frac{2E_i'}{E_i} = -\frac{2E_i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta'(E')dE'}{(E'+E_i)E'} + 2E_i\sum_{j=1}^{N}{}' \frac{E_j'}{(E_i-E_j)E_j} \qquad (2)$$

Здесь $\eta(E)$ – фаза парциальной волны, порог считается отнесенным к точке $E = 0$

Штрих в уравнениях (I), (2) означает производную по заряду g. Последний вводится как множитель в лагранжиане взаимодействия $L_{B3} = g_0 v$; перенормированный заряд g определяется как фактор при борновской амплитуде на пороге. Соответственно граничные условия для фазы имеют вид

$$\eta|_{g\to 0} = 0, \quad \eta'|_{g\to 0} = \eta'_B = \frac{p}{4\pi} v(p;p), \tag{3}$$

где $p = \sqrt{E}$, $v(p;k)$ – сферическая гармоника матричного элемента $\langle\vec{p}, -\vec{p}|v(0)|\vec{k}, -\vec{k}\rangle$, $|\vec{p}, -\vec{p}\rangle$ – двухчастичное состояние в системе центра инерции.

В цитированных выше работах были получены только сами уравнения без граничных условий. В отличие от граничного значения фазы, которое дается условием (3), граничные условия для энергий связанных состояний не выражаются непосредственно через параметры задачи. Можно, однако, показать, что уравнение (I) согласуется с (3) только при условии, что

$$E_i|_{g\to 0} = \infty. \tag{4}$$

Действительно, проинтегрировав уравнение (I), найдем

$$\eta'(E) = \mathrm{const} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{E_i}{E + E_i}\right)^2 \exp\left(\frac{2E}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta(E')dE'}{(E' - E)E'}\right).$$

При $g\to 0$ ни одна из величин E_i не может ни исчезать (иначе, в противоречии с (3), исчезнет и $\eta'(E)$), ни стремиться к постоянному пределу (иначе связанное состояние появится уже в борновской амплитуде). Остается единственная возможность (4). Нужно отметить, что условие (4) не является общим; оно верно только для таких задач, в которых перенормированная константа связи g определена как пороговое значение амплитуды рассеяния. Обратная зависимость E_0 от g при этом очевидна из другого предельного случая: при $E_0\to 0$ рассеяние становится резонансным и амплитуда, а вместе с ней и g, стремится к бесконечности. Электродинамика и другие подобные ей теории, где перенормированная константа связи α определяется как вычет амплитуды в одночастичном полюсе, в этом смысле резко отличаются от рассматриваемых моделей (у позитрония $E_0|_{\alpha\to 0} = 0$).

Следующим шагом, ведущим к упрощению уравнений, является переход к функции Иоста. Нормированная на единицу при $E = 0$ функция Иоста, при наличии N связанных состояний, имеет вид (см. /3/)

$$u = \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \frac{E}{E_i} \right) \exp\left(- \frac{E}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta(E')dE'}{(E' - E - i\varepsilon)E'} \right). \qquad (5)$$

Замечательной особенностью системы (I), (2) является то, что она приводит в точности к тому же уравнению для функции (5), что и в отсутствии связанных состояний

$$u'' + c^2(g)Eu = 0, \quad c = \lim_{E\to\infty} \frac{\eta'(E)}{\sqrt{E}}. \qquad (6)$$

Граничные условия к этому уравнению следующие (для простоты рассматривается случай одного связанного состояния с энергией E_0):

$$u|_{g\to 0} = 1, \qquad (7)$$

$$u'|_{g\to 0} = - E \left(\frac{1}{E_0} \right)' \Big|_{g\to 0} - \frac{E}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta_B'(E')dE'}{(E' - E - i\varepsilon)E'}. \qquad (8)$$

В дальнейшем в отдельности будут рассмотрены два класса задач: а) перенормируемые - для которых интеграл в (8) сходится, вследствие чего наряду с аксиоматическим существует и динамическое решение (см. /4/); б) неперенормируемые - для которых интеграл, а следовательно и граничное условие (8) не имеет смысла (в этом случае существует только аксиоматическое решение).

Легко написать условие перенормируемости, при выполнении которого задача относится к классу (а),

$$\lim_{E\to\infty} \eta_B'(E)/E^{\alpha+1} = 0 \qquad (9)$$

при любом сколь угодно малом $\alpha > 0$. Из этого условия можно найти величину $(1/E_0)'$ при $g\to 0$. Асимптотическая область $E\to\infty$ является одновременно областью автомодельности, где безразмерная борновская фаза имеет вид[ж)] $\eta_B \sim gE^{n/2}$. Отсюда видно, что для перенормируемой теории $n<2$. С другой стороны, в силу (4) при $g \to 0$ мы попадаем снова в область высоких энергий (энергий связанных состояний), где тоже должна быть справедлива автомодельность с тем же (из размерных соображений) показателем n. Отсюда при $g \to 0$ $E_0 \sim g^{-2/n}$ и $(1/E_0)' \sim g^{2/n-1}$. Поэтому в перенормируемой теории

$$\left(\frac{1}{E_0}\right)'\Big|_{g\to 0} = 0, \qquad (10)$$

и мы возвращаемся от (8) к обычным граничным условиям, установленным ранее для случая без связанных состояний.

Простейшим примером перенормируемой задачи является модель с точечным взаимодействием типа

$$V(p;\,k) = 4\pi, \qquad \eta_B = g\sqrt{E},$$
$$n = 1, \qquad s\text{-волна}$$

Приведем ее динамическое решение, которое содержит связанное состояние /2/

$$f(E) = 4\pi g/(1 - ig\sqrt{E}), \quad E_0 = g^{-2}, \quad g<0.$$

Для неперенормируемой теории ($n>2$) граничное условие (8) отпадает. Однако в этом случае аксиоматическое решение можно получить из других соображений (подробности в /4/). Например, в случае точечного взаимодействия с производными

$$V(p;\,k) = 4\pi pk, \qquad \eta_B = gE^{3/2},$$
$$n = 3, \quad p\text{-волна},$$

имеем

$$f(E) = \frac{2\pi}{i\sqrt{E}}\left[\exp\left[2i(3g)^{1/3}\sqrt{E}\right]\frac{1 - i(3g)^{1/3}\sqrt{E}}{1 + i(3g)^{1/3}\sqrt{E}} - 1\right],$$
$$E_0 = (3g)^{-2/3}, \quad g>0.$$

В заключение укажем на соотношение (правило сумм), которое можно получить из уравнений (1) и (2). Умножая (1) на

ж) Случай $n = 0$, когда g безразмерно, особый, и к нему приведенные рассуждения неприменимы (см. /5/).

$\eta''(E)/E^2$ и интегрируя по E от 0 до ∞, приходим, используя (2), к уравнению

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{E_i}\right)'' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dE}{E^2}\,\eta''(E,g) + D^2 - C^2(g),$$

где величина $D = \eta_B'(E)/\sqrt{E}\,|_{E\to 0}$ и отлична от нуля только для s-волны. Интегрируя его с учетом граничных условий (3), (4), (10), находим окончательно.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{E_i} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dE}{E^2}\left[\eta(E,g) - g\eta_B'(E)\right] + \frac{D^2 g^2}{2} - \int_0^g dg'(g - g')C^2(g'). \tag{11}$$

Аналогичные правила сумм в обычном аппарате были установлены в работе /6/.

Поступила в редакцию
6 апреля 1973 г.

Литература

1. Д. А. Киржниц. Кр. сообщ. по физике ФИАН, 10, 10 (1970).
2. Д. А. Киржниц, В сб. "Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма". "Наука", 1972 г.
3. Р. Ньютон. "Теория рассеяния волн и частиц". "Мир", 1969 г.
4. Д. А. Киржниц, М. А. Лившиц. Письма в ЖЭТФ, 4, 68 (1966); ЖЭТФ, 52, 804 (1967). М. А. Лившиц. Я. Ф. , 8, 1245 (1968).
5. Д. А. Киржниц, Г. Ю. Крючков. Т.М.Ф., 11, 152 (1972).
6. Д. А. Киржниц, Н. Ж. Такибаев. Я. Ф., 16, 435 (1972).