Краткие сообщения по физике № 1 январь 1972

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛОКАЛИЗУЕМОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Т. И. Ефремидзе,*) В. Я. Файнберг

В последнее время широко обсуждаются локализуемые и нелокализуемые теории поля с неполиноминальным ростом матричных элементов /1-5/.

Целью настоящей работы является показать, что обычные предположения статистической теории /6/ и требование роста множественности с энергией приводят к экспоненциальному росту мнимой части одночастичной функции Грина /7/.

Напишем инвариантное выражение для мнимой части одночастичной функции Грина

$$\rho(k^2) = (2\pi)^3 \sum_{n=2}^{\infty} |\langle 0|\varphi(0)|\vec{k}_1,\ldots\vec{k}_n\rangle|^2 \delta^4\left(k - \sum_{j=1}^{n} k_j\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \delta(k_j^2 - \mu^2)\theta(k_{0j})d^4k_j, \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ - оператор гейзенберговского поля, а $\langle 0|\varphi(0)\times$ $\times|\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n\rangle$ -матричный элемент n-частичного промежуточного состояния (масса одинаковых промежуточных частиц обозначается через μ).

Исходя из обычных предположений статтеории о факторизуемости и простой зависимости n-частичного матричного элемента от всевозможных инвариантов про-

*) Кутаисский Государственный Педагогический институт им. А. Цулукидзе.

цесса, имеем /6,8/

$$|\langle 0|\varphi(0)|\vec{k}_1,\ldots\vec{k}_n\rangle|^2 = \frac{1}{n!}\, c^n \prod_{j=1}^{n} (k^2)^{-r/2}(kk_j)^q, \qquad (2)$$

где c – константа, а r и q – положительные действительные числа. Подставляя (2) в (1), при $k^2\to\infty$ получим известное выражение для $\rho(k^2)$ /6,8,9/

$$\rho(k^2) \simeq (2\pi)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n \pi^{n-1}(q!)^n}{2^{n(q+1)-1}(n!)} \times$$

$$\times \frac{(k^2)^{n(q+1-r/2)-2}[2n(q+1)-n]!\,\theta(k^2-n^2\mu^2)}{[n(q+2)-4]![n(q-1)-1]![n(q+2)-2]!}. \qquad (3)$$

Асимптотическая оценка выражения (3) по методу, изложенному в работах /7,9/, дает

$$\rho(k^2) \sim \mathrm{const}(k^2)^{-2+\beta/2}\exp\left\{\alpha_q k^\beta\right\}, \qquad (4)$$

где

$$\beta = (2q+2-r)/(q+3),\quad k = \sqrt{k^2},$$

$$\alpha_q = \left\{\frac{c\pi\Gamma(q+1)(q+3)^{q+3}}{2^{q+1}(q+2)^{q+2}}\right\}^{1/(q+3)}.$$

В случае экспоненциального роста $\rho(k^2)$, когда $\beta>0$, обычное дисперсионное соотношение с конечным числом вычитаний становится несправедливым: мы выходим за пределы функционалов умеренного роста и должны писать представление Челлена–Лемана с бесконечным числом вычитаний. Эти соотношения имеют вид /3,9/

$$D^c(k^2) = g_1(k^2) + g_2(k^2)\int_0^\infty \frac{\rho(k'^2)dk'^2}{g_2(k'^2)(k'^2-k^2-i\varepsilon)}, \qquad (5)$$

где $g_i(k^2)$, $i = 1,2$, – произвольные целые функции, которые удовлетворяют тем условиям, что $g_2(k^2)$ растет на полуоси $k^2 \geq 0$ с ростом k^2 быстрее $\rho(k^2)$ и не имеет здесь нулей.

Если $\beta < 1$, то в этом случае $D^c(k^2)$ и $\rho(k^2)$ являются локализуемыми функциями. Если $\beta \geq 1$, то мы получаем рост, соответствующий нелокализуемым взаимодействиям.

Интересно отметить, что в рамках наиболее общих статистических предположений существует единственная возможность получить степенное поведение $\rho(k^2)$ и в то же время сохранить рост множественности с энергией. Для этого, однако, надо выйти за рамки предположения (2) теории Максименко и Розенталя.

Предположим, что при $k^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} k_j\right)^2 \to \infty$

$$|\langle 0|\varphi(0)|\vec{k}_1,\ldots\vec{k}_n\rangle|^2 = \frac{1}{n!}\, C^n(\ln k^2)^{n\lambda}(k^2)^{-n}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (1) и делая элементарные расчеты, получим /9/

$$\rho(k^2) \simeq (2\pi)^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C^n\left|\frac{\pi}{2}\right|^{n-1}(k^2)^{-2}(\ln k^2)^{n\lambda}\theta(k^2 - n^2\mu^2)}{n!(n-1)!(n-2)!}. \qquad (7)$$

Чтобы найти главный член асимптотики $\rho(k^2)$, заменим сумму интегралом по n и положим $\theta(k^2 - n^2\mu^2) = 1$, тогда

$$\rho(k^2) \simeq 2(2\pi)^2(k^2)^{-2}\int_0^{\infty}\frac{dn\,n^2(n-1)(\varkappa)^n}{[\Gamma(n+1)]^3}, \qquad (8)$$

где

$$\varkappa = (C\pi/2)(\ln k^2)^{\lambda}.$$

Интегрирование дает (используя формулу Стирлинга)

$$\rho(k^2) \approx (2\pi)^{5/2} 2\bar{n}^{3} (2\pi\bar{n})^{-3/2} (2\pi/3\bar{n})^{1/2} \exp(3\bar{n}), \qquad (9)$$

$$\bar{n} = \varkappa^{1/3} = (C\pi/2)^{1/3} (\ln k^2)^{\lambda/3} = \frac{1}{3}\alpha_1 (\ln k^2)^{\lambda/3},$$

или окончательно

$$\rho(k^2) \approx \frac{4\pi\alpha_1}{3\sqrt{3}} (k^2)^{-2} (\ln k^2)^{\lambda/3} \exp\left|\alpha_1 (\ln k^2)^{\lambda/3}\right|. \qquad (10)$$

Из этой формулы ясно, что при $0 < \lambda < 3$, $\rho(k^2)k^4$ растет медленнее любой степени k^2, т.е.

$$\rho(k^2) \leqslant \frac{C}{(k^2)^2} (k^2)^{\varepsilon}$$

при любом, сколь угодно малом, но конечном $\varepsilon > 0$. При $\lambda = 3$ находим

$$\rho(k^2) \approx \frac{4\pi\alpha_1}{3\sqrt{3}} \ln k^2 (k^2)^{\alpha_1 - 2},$$

т.е. степенной рост $\rho(k^2)k^4$.

Из определения (3) и (6) видно, что $c \sim g$, где g - константа связи (в случае слабой связи /10/). Следовательно, возникает неаналитическая зависимость $\rho(k^2)$ от g^2, которая сохраняется при всех значениях λ.

Отметим, что при $\lambda > 3$ мы получаем рост $\rho(k^2)$ быстрее любой конечной степени k^2. Снова мы выходим за класс полиномиально ограниченных теорий и вынуждены в этом случае писать дисперсионные соотношения типа (5). При всех $\lambda > 0$ множественность $\bar{n}$ растет с ростом k^2.

В заключение сделаем три замечания.

1. При всех предположениях о зависимости $|\langle 0|\varphi(0)\times$ $\times|n\rangle|^2$ от инвариантов, даже в том случае, когда по-

лучается экспоненциальный рост $\rho(k^2)$, мы не приходим к внутреннему противоречию типа "заряд нуль". Асимптотическое поведение $\rho(k^2)$ определяет лишь характер перенормировки теории.

2. Вопрос о качественном изменении энергетической зависимости физических величин после суммирования по числу "промежуточных состояний" имеет принципиальное значение для проблем внутренней замкнутости современной локальной теории поля.

3. В случае $\beta > 1$, т.е. в нелокализуемых теориях, как показал Воронов /11/, возникают дополнительные возможности для устранения трудности "заряда – нуль" даже в рамках лагранжевой формулировки.

Поступила в редакцию
18 октября 1971 г.

Литература

1. Н. Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 (1964).
2. A.M.Jaffe. Phys. Rev., 158, 1954 (1967).
3. В. Я. Файнберг. Препринт ФИАН № 137, 1967 г.
4. М. З. Иоффе, В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 56, 1644 (1969); ТМФ, 1, 187 (1969).
5. Г. В. Ефимов. Докторская диссертация. 1968 г.
6. В. М. Максименко, И. Л. Розенталь. ЖЭТФ, 39,754 (1950).
7. Т. И. Ефремидзе. Сообщ. АН ГССР, 43, 309 (1966).
8. Т. И. Ефремидзе, В. Я. Файнберг, Д. С. Чернавский. Препринт ФИАН, А–53, 1965 г.
9. Т. И. Ефремидзе. Некоторые вопросы статистической теории множественного образования. Диссертация и автореферат, ТГУ, Тбилиси, 1969 г.
10. В. Я. Файнберг и др. ЖЭТФ, 38, 1803 (1960).
11. Б. Л. Воронов. Препринт ФИАН № 112, 1967 г.