Краткие сообщения по физике № 8 август 1972

ФЛУКТУАЦИИ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. Ю. Быченков, В. П. Силин, В. Т. Тихончук

В настоящем сообщении изложена теория флуктуаций в плазме, находящейся в переменном электрическом поле $\vec{E}(t) = \vec{E}\sin\omega_0 t$. В отличие от работ Дюбуа и Гольдмана /I,2/ использован метод микроскопических фазовых плотностей

$$N_\alpha(\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha,t) = \sum_{1\le i\le N_\alpha} \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha i}(t))\delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{\alpha i}(t)),$$

где суммирование ведется по всем частицам сорта α /3,4/. Ограничимся лишь эффектами, обусловленными кулоновским взаимодействием. Тогда

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \frac{\partial N_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha} + e_\alpha \vec{E}(t)\frac{\partial N_\alpha}{\partial \vec{p}_\alpha} - \frac{\partial N_\alpha}{\partial \vec{p}_\alpha}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_\alpha}\sum_\beta \int d\vec{r}_\beta d\vec{p}_\beta \frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|} N_\beta = 0. \tag{I}$$

Для отклонения δN_α от средних значений $\bar{N}_\alpha = f_\alpha(\vec{p}_\alpha)$ получаем линейные уравнения. Используя одностороннее преобразование Фурье по времени и преобразование Фурье по координатам для функций $u_\alpha(\vec{k},t) = e_\alpha \int dp_\alpha \delta N_\alpha(\vec{k},\vec{p}_\alpha + \vec{P}_\alpha(t),t)\exp\{i\vec{k}\vec{R}_\alpha(t)\}$, где $\vec{P}_\alpha(t)$ и $\vec{R}_\alpha(t)$ определяются из решения уравнения характеристик

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_\alpha = e_\alpha \vec{E}(t); \qquad \vec{R}_\alpha(t) = \frac{1}{m_\alpha}\int_0^t dt'\vec{P}_\alpha(t'),$$

получаем следующую неоднородную систему уравнений, решения которой определяются значениями функций δN_α в начальный момент времени $t = 0$:

$$u_\alpha(n) + \delta\varepsilon_\alpha(n)\sum_\alpha\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(a_{\alpha\beta})u_\beta(m) =$$

$$= ie_\alpha \int d\vec{p}_\alpha \frac{\delta N_\alpha(\vec{k},\vec{p}_\alpha,t=0)}{\omega + n\omega_0 + i\Delta - \vec{k}\vec{v}_\alpha}. \qquad (2)$$

Здесь $u_\alpha(n) = u_\alpha(\omega + n\omega_0,\vec{k})$, $\delta\varepsilon_\alpha(n) = \delta\varepsilon_\alpha(\omega + n\omega_0,\vec{k})$ – парциальная продольная диэлектрическая проницаемость частиц сорта α, J_n – функция Бесселя целочисленного индекса n,

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\vec{k}\vec{E}}{\omega_0^2}\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \frac{e_\beta}{m_\beta}\right) \equiv a_\alpha - a_\beta.$$

Полученная система уравнений (2) отличается от изучавшихся в теории параметрического резонанса /5/ наличием правых частей. С помощью величин $u_\alpha(n)$ можно определить плотность зарядов $\delta\rho(\omega,\vec{k})$ и, следовательно, корреляционную функцию самосогласованного кулоновского поля $(\vec{E}\vec{E})_{\omega,\vec{k}}$:

$$\delta\rho(\omega,\vec{k}) = \sum_\alpha\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a_\alpha)u_\alpha(m)$$
$$(\vec{E}\vec{E})_{\omega,\vec{k}} = \left|\frac{4\pi}{k}\right|^2(\delta\rho\delta\rho)_{\omega,\vec{k}}. \qquad (3)$$

Для определения спектральных функций корреляций использовалась формула

$$(2\pi)^3\delta(\vec{k} - \vec{k}')(\delta\rho\delta\rho)_{\omega,\vec{k}} = \lim_{\Delta\to 0} 2\Delta\overline{\delta\rho(\omega,\vec{k})\delta\rho^*(\omega,\vec{k}')},$$

где черта означает усреднение по статистическому ансамблю. При этом спектральные функции согласно системе уравнений (2) выражаются через одновременные

$$\overline{\delta N_\alpha(\vec{k},\vec{p}_\alpha,t=0)\delta N^*_\beta(\vec{k}',\vec{p}_\beta,t=0)} =$$

$$= (2\pi)^3\delta(\vec{k} - \vec{k}')\left[\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta)f_\alpha + g_{\alpha\beta}\right],$$

где $g_{\alpha\beta}(\vec{k},\vec{p}_\alpha,\vec{p}_\beta)$ – парная корреляционная функция.

Бесконечная система уравнений (2) может быть решена в низкочастотном пределе $|\omega| \ll \omega_0$, когда следует использовать малость ионной диэлектрической проницаемости $|\delta\varepsilon_i(\omega + m\omega_0,\vec{k})| \ll 1$ при $m \neq 0$.

Согласно определению (3) для флуктуаций плотности заряда получаем следующее выражение:

$$(\delta\rho\delta\rho)_{\omega,\vec{k}} = |D|^{-2} \sum_{\alpha=i,e} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_\alpha(m) \frac{e_\alpha^2}{|1+\delta\varepsilon_\alpha(m)|^2} \int d\vec{p}_\alpha 2\pi\delta \times$$
$$\times(\omega + m\omega_0 - \vec{k}\vec{v}_\alpha) f_\alpha(\vec{p}_\alpha), \tag{4}$$

где нули выражения

$$D(\omega,\vec{k}) = 1 + \frac{\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})}{1+\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) \frac{\delta\varepsilon_e(n)}{1+\delta\varepsilon_e(n)}$$

определяют частоты собственных колебаний плазмы (ср. /5/), а коэффициенты $C_\alpha(m)$ в случае, когда можно пренебречь влиянием электрического поля на движение ионов, имеют вид ($a_e \equiv a$)

$$C_e(m) = \frac{J_m^2(a)}{|1+\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})|^2}; \qquad C_i(0) = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(a)}{1+\delta\varepsilon_e(n)}\right|^2;$$

$$C_i(m) = |1+\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})|^{-2} \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(a)J_{n-m}(a)}{1+\delta\varepsilon_e(n)}\right|^2, \quad \text{если} \quad m \neq 0.$$

В качестве иллюстрации полученных выражений рассмотрим максвелловскую плазму с температурой электронов T_e и ионов T_i. Для частоты ω_0, удовлетворяющей неравенству $\omega_0 \gtrsim \omega_{Le}\left[1 + (m_e/m_i)^{1/3}\right]$, резко уменьшается инкремент параметрической неустойчивости. В условиях устойчивости плазмы, что облегчается при $T_i \gg T_e$, плотность флуктуаций поля вблизи частоты $\omega \sim 0{,}8(m_e/m_i)^{1/3}\omega_{Le}$ /5/ определяется формулами

$$(\vec{E}\vec{E})_{\omega,\vec{k}} = \frac{4\pi\varkappa T_e}{J_0^2\Gamma_e} \frac{\omega^2\omega_{Le}^2}{\omega_{Li}^4} \left[1 + \frac{T_i\Gamma_i\omega_{Le}^2}{J_0^2 T_e\Gamma_e\omega_{Li}^2}\right]\left[1 + \frac{\Gamma_i\omega_{Le}^2}{J_0^2\Gamma_e\omega_{Li}^2} - 0{,}25\frac{J_1^2\tilde{\gamma}\omega_{Le}^3}{J_0^2\Gamma_e\omega^3}\right],$$
$$\omega \gg kv_{Te},$$

$$(\vec{k}\vec{E})_{\omega,\vec{k}} = \frac{4\pi \varkappa T_e}{J_o^2 \gamma_s} \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} \left[1 + \frac{T_i \Gamma_i}{J_o^2 T_e \gamma_s}\right] \left[1 + \frac{\Gamma_i}{J_o^2 \gamma_s} - \sqrt{2} \frac{J_{1o}^2 \tilde{\gamma} \omega_{Le} \omega_{Li}^2}{J_o^2 \gamma_s \omega^3}\right]^{-2},$$

$$\omega \ll k v_{Te}, \qquad (5)$$

где $\omega_{L\alpha}$ и $v_{T\alpha}$ - ленгмюровская частота и тепловая скорость частиц сорта α, $\tilde{\gamma}$ и γ_s - декременты затухания электронных ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний, $\varkappa$ - постоянная Больцмана. При этом введено обозначение

$$\Gamma_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 v_{T\alpha}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2}\right).$$

Из выражений (5) видно, что вблизи границы устойчивости уровень флуктуаций оказывается аномально большим.

В случае слабой волны накачки $(a \ll 1)$ в условиях параметрического резонанса на плазменной частоте корреляционная функция поля на низких частотах $(|\omega| \ll \omega_o)$ имеет вид:

$$(\vec{k}\vec{E})_{\omega,\vec{k}} = \frac{8\pi \varkappa T_e}{|\tilde{\varepsilon}(\omega,\vec{k})|^2} \left\{ \frac{\delta\varepsilon_e''(\omega,\vec{k})}{\omega} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{4} |1 + \delta\varepsilon_e(\omega,k)|^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left[|\varepsilon(\omega_o - \omega,\vec{k})|^{-2} + |\varepsilon(\omega_o + \omega,\vec{k})|^{-2}\right] \frac{\delta\varepsilon_e''(\omega_o,\vec{k})}{\omega_o} \right\}, \quad (T_e \gg T_i), \qquad (6)$$

где $\tilde{\varepsilon}(\omega,\vec{k}) = \varepsilon(\omega,\vec{k}) + (a^2/4)\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})/(1 + \delta\varepsilon_e(\omega,\vec{k})\left[\varepsilon^{-1}(\omega - \omega_o,\vec{k}) + \varepsilon^{-1}(\omega + \omega_o,\vec{k})\right]$ - нелинейная продольная диэлектрическая проницаемость, а $\varepsilon(\omega,\vec{k}) = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega,\vec{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})$ - линейная продольная диэлектрическая проницаемость. Нетрудно убедиться, что второе слагаемое в выражении (6), связанное с вкладом высокочастотных шумов в уровень флуктуаций на низкой частоте, входит с множителем $\omega/\omega_o \ll 1$ и, следовательно, пренебрежимо мало. Поэтому для спектральной плотности энергии

$$W(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(\vec{k}\vec{E})_{\omega,\vec{k}}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial\omega} (\omega\tilde{\varepsilon}')$$

низкочастотных колебаний в распадных условиях, когда $\omega_o \approx \omega_{Le} + \omega_s$, получаем следующее выражение:

$$W_s(\vec{k}) = \frac{æ T_e}{|1 - E^2/E^2_{пор}|}, \tag{7}$$

где поле $E_{пор}(\vec{k})$, при превышении которого в плазме возникает параметрическая неустойчивость, определяется соотношением /6/

$$\left(\frac{e\vec{k}\vec{E}_{пор}}{m\omega_o^2 k r_{De}}\right)^2 = 16\, \frac{\gamma_s \tilde{\gamma}}{\omega_s \omega_o}, \tag{8}$$

где ω_s частота ионно-звуковых колебаний, r_{De} - радиус дебаевского экранирования электронов.

В области частот, близких к частоте волны накачки,

$$(\vec{E}\vec{E})_{\omega_o \pm \omega, \vec{k}} = \frac{8\pi æ T_e}{|\tilde{\varepsilon}(\omega,\vec{k})|^2} \left| \frac{\varepsilon(\omega,\vec{k})}{\varepsilon(\omega_o \pm \omega,\vec{k})} \right|^2 \left\{ \frac{\delta\varepsilon_e''(\omega_o,\vec{k})}{\omega_o} \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{a^2}{2} \operatorname{Re} \frac{\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})(1 + \delta\varepsilon_e(\omega,\vec{k}))}{\varepsilon(\omega,\vec{k})\varepsilon(\omega \mp \omega_o,\vec{k})}\right] + \frac{a^2}{4} \left| \frac{\delta\varepsilon_i(\omega,\vec{k})}{\varepsilon(\omega,\vec{k})} \right|^2 \frac{\delta\varepsilon_e''(\omega,\vec{k})}{\omega} \right\},$$

$$(T_e \gg T_i). \tag{9}$$

В распадных условиях получаем следующее выражение для спектральной плотности энергии ленгмюровских шумов на частоте $\omega_o - \omega$:

$$W_L(\vec{k}) = \frac{æ T_e}{|1 - E^2/E^2_{пор}|} \left[1 + \frac{E^2}{E^2_{пор}} \frac{\omega_o}{\omega_s}\right], \tag{10}$$

что совпадает с соответствующей формулой работы /I/.

Авторы признательны В. В. Пустовалову за обсуждение полученных результатов.

Поступила в редакцию
I9 мая I972 г.

Литература

1. D. F. DuBois, M. V. Goldman. Phys. Rev., 164, 207 (1967).
2. D. F. DuBois. Statistical Physics of Charged Particle Systems, ed. by R. Kubo and T. Kihara (Benjamin, N.Y. 1969), P.P. 151-153.
3. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин. ДАН СССР, 145, 764 (1962).
4. Ю. Л. Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, изд. МГУ, 1964 г.
5. В. П. Силин. ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).
6. Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирий, В. П. Силин. ЖЭТФ, 57, 1024 (1969).