Краткие сообщения по физике № 9 сентябрь 1972

О ПЕРЕСТРОЙКЕ СПЕКТРОВ СЛАБОВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МОД

В. М. Левин, И. А. Полуэктов,
В. И. Пустовойт, Д. А. Чернозатонский

Обычно в кристалле распространяется несколько типов собственных колебаний, связанных с той или иной подсистемой кристаллической среды. Связь между частотой и волновым вектором этих волн задается дисперсионным уравнением $L_\alpha(\omega,\vec{q}) = 0$, где L_α - линейный дисперсионный оператор α-ой моды, определяемый свойствами (параметрами) соответствующей подсистемы. Учет слабого взаимодействия между подсистемами практически не изменяет спектры мод α и α', существенно влияя только на характер их затухания (усиления). Лишь в узкой области вблизи точки пересечения спектров "включение" такого взаимодействия приводит к перестройке спектров этих волн. Существенно отметить, что такая перестройка имеет место лишь тогда, когда поправки к спектрам пересекающихся мод за счет взаимодействия между подсистемами больше или сравнимы с величиной $|\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'}|$, где $\gamma_{\alpha,\alpha'}$ - декременты неперестроенных мод.

С учетом взаимодействия между подсистемами уравнения для амплитуд $u_{\alpha,\alpha'}(\omega,\vec{q})$ мод α и α' имеют вид

$$L_\alpha u_\alpha = \lambda_{\alpha'} u_{\alpha'};\ L_{\alpha'} u_{\alpha'} = \lambda_\alpha u_\alpha, \tag{I}$$

где $\lambda_{\alpha,\alpha'}$ - линейные операторы связи между подсистемами. Условие разрешимости системы (I) определяет дисперсионное уравнение

$$L_\alpha L_{\alpha'} - \lambda_\alpha \lambda_{\alpha'} = 0. \tag{2}$$

Как правило решение (2) приходится искать приближенно, используя малость параметра связи между подсистемами. В дальнейшем мы будем считать, что частота ω есть функция действительного $\vec{q}$. Перестройка спектров в случае граничной задачи, когда ω действительна, рассматривается аналогично.

Пусть q_0 - значение волнового вектора, при котором $\omega'_\alpha(q_0) = \omega'_{\alpha'}(q_0) \equiv \omega_0$, $(\omega' \equiv \mathrm{Re}\,\omega)$. Раскладывая $L_{\alpha,\alpha'}$ в окрестности точки (ω_0, q_0), легко получить решение уравнения (2) в области пересечения спектров

$$\omega_{1,2} = \omega_0 + \frac{1}{2}\left\{(v_\alpha + v_{\alpha'})\Delta q - i(\gamma_\alpha + \gamma_{\alpha'}) \pm \sqrt{k(\Delta q)}\right\}, \qquad (3)$$

где $k(\Delta q) = \left\{\Delta q(v_\alpha - v_{\alpha'}) - i(\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'})\right\}^2 + D$; $\Delta q = q - q_0$. Здесь $v_{\alpha,\alpha'}$ и $\gamma_{\alpha',\alpha}$ - групповые скорости и декременты неперестроенных мод $(v_\alpha \neq v_{\alpha'})$; $D = \left[4\lambda_\alpha\lambda_{\alpha'}/(\partial L_\alpha/\partial\omega)(\partial L_{\alpha'}/\partial\omega)\right]_{\omega_0, q_0}$. Слабость взаимодействия между подсистемами означает, что $D/\omega_0^2 \ll 1$.

Величины $\omega'_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ должны быть непрерывными функциями волнового вектора. Поскольку выражение (3) содержит корневую особенность, то зависимость $\omega_{1,2}$ от расстройки Δq в области перестройки нуждается в специальном анализе. На плоскости комплексной переменной $K = K' + iK''$ функция $K(\Delta q)$ параметрически задает параболу с вершиной в точке $\left\{D' - (\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'})^2, D''\right\}$. Если $\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha'}$, то парабола вырождается в полуограниченную прямую $K'' = D''$, $D' < K' < \infty$. Характер перестройки спектров определяется взаимным расположением точки ветвления $K = 0$ и кривой $K(\Delta q)$ на плоскости K.

I. В случае слабой связи, когда

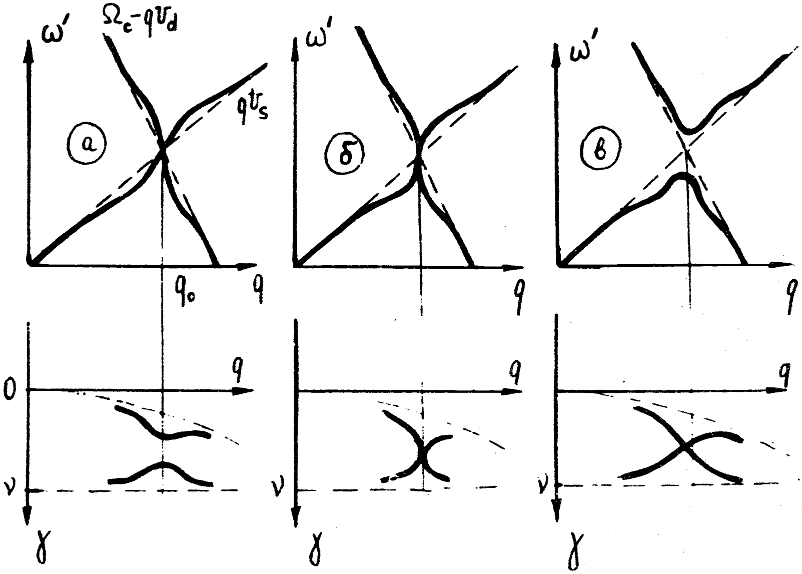
$$(\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'})^2 > \frac{1}{2}(D' + |D|) \qquad (4)$$

парабола пересекает ось K' слева от начала координат, и расталкивание спектров не происходит. Кривые $\omega'_{1,2}$ представляют собой кривые $\omega'_{\alpha,\alpha'}$, деформированные в области перестройки. Декременты мод в области вырождения различны, причем при $D' > 0$ они сближаются (рис. Iа), а при $D' < 0$ - расталкиваются (рис. 2а).

II. Если

$$(\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'})^2 = \frac{1}{2}(D' + |D|), \qquad (5)$$

то парабола проходит через точку $K = 0$, и в спектре возникает особая точка, в которой ω' и γ обеих мод совпадают (рис. Iб). В этом случае взаимодействие между подсистемами вырождения не снимает и невозможен однозначный ответ на вопрос, в какую из ветвей переходит решение $\omega_1(\omega_2)$ после прохождения особой точки. Поскольку в этой точке $d\omega'_{1,2}/dq = \infty$, то в ее окрестности дисперсия столь велика, что понятие пакета, а вместе с ним и групповой



Р и с. I. Спектр колебаний кристалла с учетом взаимодействия мод при $D'>0$.

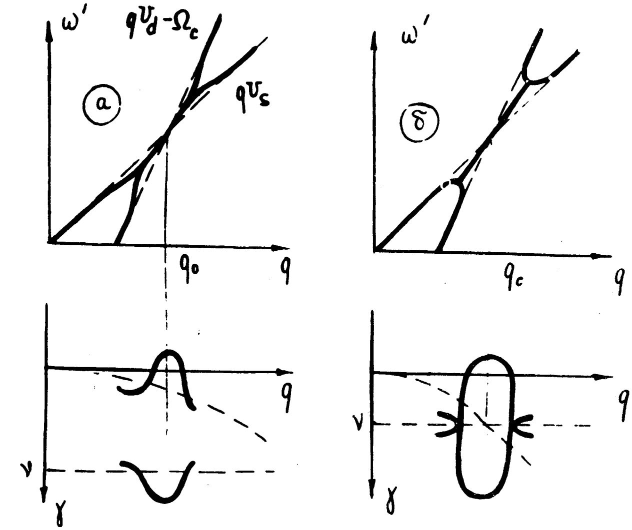
скорости волн, теряет смысл. Наконец, в особых точках два решения, отвечающие плоским волнам с частотами ω'_1 и ω'_2, сливаются в одно; второе же линейно независимое решение пропорционально $t\ \exp\{i\vec{q}\vec{r} - i\omega t\}$.

При $\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha'}$ парабола $K(\Delta q)$ вырождается в прямую, дважды проходящую через начало координат. В спектре возникают две особые точки. В области значений Δq, лежащих между ними, $\omega'_1(q) \approx \approx \omega'_2(q)$ и $d\omega'_{1,2}/dq \approx (v_\alpha + v_{\alpha'})/2$, а декременты существенно расталкиваются (рис. 2б).

Ш. В случае сильной связи, когда

$$(\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'})^2 < \frac{1}{2}\,(D' + |D|), \qquad (6)$$

и парабола $K(\Delta q)$ пересекает ось K' справа от начала координат, имеет место хорошо известное расталкивание спектров и переход с одной ветви колебаний на другую (рис. Iв). Перестроенные декременты пересекаются, если $\gamma_\alpha \neq \gamma_{\alpha'}$, и расталкиваются, если до



Р и с. 2. Спектр колебаний кристалла с учетом взаимодействия мод при $D' < 0$.

включения взаимодействия в области вырождения декременты совпадали.

На рис. I и 2 в качестве примера приведена динамика перестройки спектров акустических и дрейфовоциклотронных волн электронной плоскости в пьезополупроводнике в скрещенных электрическом и магнитном полях /I,2/. Величины, входящие в (3), для этого случая имеют вид

$$\omega_\alpha = qv_s \quad \gamma_\alpha = \gamma_{вяз}; \quad \omega_{\alpha'} = \vec{q}\vec{v}_d + n\Omega_c \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\gamma_{\alpha'} = \nu; \qquad D = \eta^2 \frac{2n\Omega_c^2 q^2 r_0^2}{\pi(1 + q^2 r_0^2)^2} \frac{v_s}{v_T}. \qquad (7)$$

(Обозначения см. в /I/).

При пересечении звуковой и плазменной волны с $n > 0$ и $\vec{q}\vec{v}_d < 0$

параметр $D>0$ в зависимости от знака $R = D - (\gamma_{вяз} - \nu)^2$ существуют различные виды перестройки спектров. При малой концентрации электронов, когда $qr_0 \gg 1$, значение D мало и $R<0$, что соответствует случаю слабой связи (рис. Iа). С ростом концентрации наклон касательных к кривым $\omega'_{1,2}(q)$ увеличивается, а расстояние между экстремумами декрементов уменьшается. При $R = 0$ в спектре возникает особая точка (рис. Iб). При дальнейшем увеличении концентрации ($qr_0 \sim 1$) $R>0$ и имеет место случай сильной связи (рис. Iв).

В случае пересечения акустической и плазменной волны с $R<0$, $\vec{q}\vec{v}_d>0$ параметр $D<0$, и при $\gamma_{вяз} \neq \nu$ происходит перестройка по типу I (рис. 2а). При $\gamma_{вяз} \to \nu$ угол между кривыми $\omega'_{1,2}(q)$ уменьшается и при $\gamma_{вяз} = \nu$ частоты сливаются в одну прямую, образуя характерный спектр с двумя особыми точками (рис. 2б).

Аналогичным образом можно проанализировать пересечение звуковых и спиральных электромагнитных волн в металлах и полупроводниках. Величины, определяющие перестройку спектров таких волн, имеют вид /3-5/:

$$\omega_\alpha = qv_s, \quad \gamma_\alpha = \gamma_{вяз}; \quad \omega_{\alpha'} = \vec{q}\vec{v}_d \pm \omega_г, \quad \omega_г = \frac{q^2c^2\Omega_c^2}{\omega_{Le}^2},$$
$$\gamma_{\alpha'} = \frac{\nu q^2c^2}{\omega_{Le}^2}, \quad D = \frac{mn_0\Omega_c}{2\rho}\left[\omega_г \pm \vec{q}\vec{v}_d\right]. \tag{8}$$

Для левополяризованного геликона (верхний знак в $\omega_{\alpha'}$ и D) при $R = D - (\gamma_{вяз} - \nu q^2c^2/\omega_{Le}^2)^2$ меньше нуля имеет место случай слабой связи, когда $R = 0$, и возникает спектр с одной особой точкой; при $R>0$ происходит расталкивание мод.

Для правополяризованного геликона (нижний знак в $\omega_{\alpha'}$ и D) пересечение со звуковой ветвью происходит при $qv_d>\omega_г$. В этом случае $D<0$, и имеет место перестройка спектров типа слабой связи.

Наличие пересекающихся звуковых и геликоновых спектров типа слабой связи было выяснено в работе Акрамова /3/. Но автор этой работы при рассмотрении случая сильной связи допустил ошибку, на которую было указано в работе Канера и Скобова /4/. Однако, в свою очередь, авторы работы /4/, не проанализировав поведение функции вблизи точки ветвления при извлечении корня, ошибочно получили расталкивание спектров и в случае слабой связи. Эти примеры показывают, насколько нужно быть осторожным при исследовании связанных волн вблизи точек пересечения спектров.

Таким образом, общая теория перестройки спектров пересекающихся мод позволяет выявить те условия, при которых реализуется тот или иной тип перестройки, а также рассмотреть динамику переходов от одного типа спектров к другому. Выводы данной работы могут использоваться при рассмотрении любой среды, в которой можно выделить слабовзаимодействующие подсистемы, поскольку явный вид дисперсионных операторов и операторов взаимодействия не был конкретизирован.

Поступила в редакцию
5 июня 1972 г.

Литература

1. В. П. Орлов, В. И. Пустовойт. ФТП, 2, 1305 (1968).
2. В. И. Пустовойт, Ю. П. Мухортов. Письма в ЖЭТФ, 12, 611 (1970).
3. Г. Акрамов. ФТТ, 5, 1310 (1963).
4. В. Г. Скобов, Э. А. Канер. ЖЭТФ, 46, 273 (1964).
5. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко. ФТТ, 8, 2793 (1966).