Краткие сообщения по физике № 11 ноябрь 1972

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И В ПОЛЕ КВАНТОВАННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

А. Е. Казаков, М. В. Федоров

В последнее время появился ряд работ /I/ - /3/, в которых исследуется поведение простых систем в поле квантованной электромагнитной волны. В работе /I/ найдена волновая функция электрона, взаимодействующего с квантованным монохроматическим электромагнитным полем. Работа /3/ посвящена рассмотрению движения электрона в поле квантованной электромагнитной волны линейной поляризации, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля. В настоящей работе в рамках одночастичного подхода найдены волновые функции и исследован спектр электрона в магнитном поле и в поле квантованной циркулярно поляризованной волны. Показано, что при определенном знаке поляризации (для левополяризованной волны) возникают некоторые особенности, качественно отличающие этот случай от задачи, рассмотренной в /3/.

Рассмотрим сначала уравнение Клейна-Гордона для частицы в постоянном магнитном поле H с векторным потенциалом $\vec{A}^{(H)} = \left\{-Hx_2,\ 0,\ 0\right\}$ и в поле квантованной монохроматической электромагнитной волны круговой поляризации, распространяющейся вдоль магнитного поля $\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\left[(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)c\exp(ikx) + э.с.\right]$, где c - оператор уничтожения фотонов с волновым вектором $k = (0,\ 0,\ \omega,\ i\omega)$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ - единичные векторы вдоль осей x_1, x_2; $H \parallel x_3$, знаки $\pm$ соответствуют правой или левой поляризации, $kx = \vec{k}\vec{r} - \omega t$.

Преобразование волновой функции с помощью унитарной матрицы $U_1 = \exp\left\{-ikx(c^+c + 1/2)\right\}$ приводит к дифференциальному уравнению, в котором коэффициенты не зависят от переменных x_1, x_3, x_0, что позволяет искать решение в виде $\psi = \exp(iqx)\Phi$. Квантовые числа

$q_\mu = \{q_1, 0, q_3, iq_0\}$ являются собственными значениями оператора энергии-импульса системы $-i\partial/\partial x_\mu + k_\mu c^+ c$. Используя "координатное" представление для операторов c, c^+ /5/, т.е. $c = (1/\sqrt{2})(\xi + \partial/\partial\xi)$, $c^+ = (1/\sqrt{2})(\xi - \partial/\partial\xi)$, приходим к следующему уравнению для функции $\Phi(\xi, y)$:

$$L\Phi = (q_0^2 - q_3^2 - m^2)\Phi,$$

$$L = eH\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2\right) + \left[-(qk) + \frac{e^2}{2\omega V}\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2\right) + \frac{e\sqrt{2eH}}{\sqrt{\omega V}}\left(\xi y \pm \frac{\partial^2}{\partial y \partial \xi}\right),$$

$$y = \sqrt{eH}x_2 + q_1/\sqrt{eH}. \qquad (I)$$

Оператор L имеет вид гамильтониана системы двух связанных осцилляторов и линейным преобразованием переменных ξ, y может быть приведен к нормальным координатам u, v

$$\xi = \alpha_1 u + \alpha_2 v, \quad y = \beta_1 u + \beta_2 v, \qquad (2)$$

где $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ – некоторые функции квантовых чисел и параметров задачи, которые мы не будем выписывать ввиду их громоздкости.

$$L = -\frac{kq}{\omega}\left[\omega_1\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - u^2\right) + \omega_2\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - v^2\right)\right], \qquad (3)$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{kq}\right)^2\left\{\left(-qk + \frac{e^2}{2\omega V} \mp eH\right)^2 \mp 2(qk)eH + (-1)^n \operatorname{Sgn}(qk) \times \right.$$

$$\left. \times\left(-qk + \frac{e^2}{2\omega V} \mp eH\right)\sqrt{\left(-qk + \frac{e^2}{2\omega V} \pm eH\right)^2 \mp \frac{2e^3H}{\omega V}}\right\}; \quad n = 1,2. \qquad (4)$$

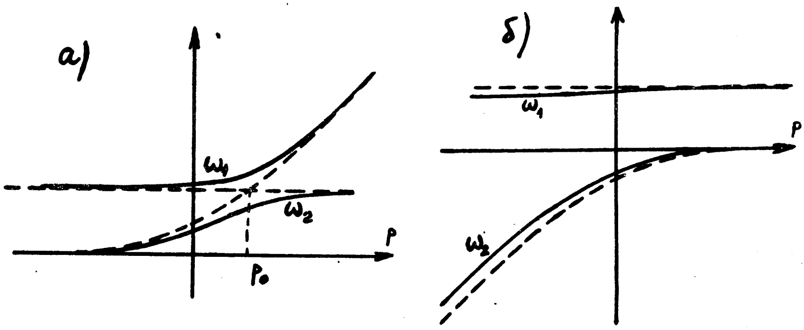
Собственные функции оператора L хорошо известны

$$\Phi_{n_1 n_2}(u,v) = (n_1! n_2! 2^{n_1+n_2}\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right) H_{n_1}(u) H_{n_2}(v), \qquad (5)$$

где H_n – полиномы Эрмита. Уравнение (I) определяет при этом зависимость $q_0(q_3)$ и заменой q_3 на новое квантовое число p и, аналогично, q_0 на ε

$$q_3 = p + (n_1 + 1/2)\omega_1 + (n_2 + 1/2)\omega_2,$$
$$q_0 = \varepsilon + (n_1 + 1/2)\omega_1 + (n_2 + 1/2)\omega_2 \qquad (6)$$

сводится к простому дисперсионному уравнению $\varepsilon^2 = p^2 + m^2$. Квантовые числа p и ε имеют смысл компоненты импульса электрона вдоль магнитного поля и, соответственно, его энергии в пределе слабого взаимодействия. Возможна классификация состояний си-



Р и с. I. Зависимость частот ω_1 и ω_2 от квантового числа p в случае левополяризованной волны: а) для состояний с $\varepsilon > 0$; б) для состояний с $\varepsilon < 0$. Пунктиром изображены частота фотонов и циклотронная частота $eH/(\varepsilon - p)$ в отсутствии взаимодействия.

стемы по знаку ε. Однако эти состояния имеют смысл состояний с положительными или отрицательными энергиями только в отсутствии взаимодействия.

Используя (4) и равенство $qk = \omega(p - \varepsilon)$, получаем окончательную зависимость $q_0(p)$. Для левополяризованной волны эта функция является гладкой для обоих знаков qk_0. На рисунке I представлены функции $\omega_1(p)$ и $\omega_2(p)$. Для положительных энергий $\varepsilon = +\sqrt{p^2 + m^2}$ окрестность циклотронного резонанса $\varepsilon_0 - p_0 = eH/\omega$ является областью сильного взаимодействия циклотронной и фотонной мод, что приводит к "расталкиванию уровней". Интересно отметить, что при переходе через резонанс смысл частот ω_1 и ω_2 меняется. В пределе слабого взаимодействия при $p > p_0$ $\omega_2 \to \omega$, $\omega_1 \to eH/(\varepsilon - p)$; при $p < p_0$ $\omega_1 \to \omega$, $\omega_2 \to eH/(\varepsilon - p)$. В первом случае n_2 определяет число фотонов, n_1 – номер уровня Ландау, а во втором случае – наоборот [ж)]. Для отрицательных

ж) Этот факт остался незамеченным в работе /8/.

"энергий" $\varepsilon = -\sqrt{p^2 + m^2}$ частоты ω_1, ω_2 мало отличаются соответственно от частоты фотонов и циклотронной частоты. В случае поляризации другого знака (правой) частоты ω_1 и ω_2 пересекаются в точке p_0 для состояний $\varepsilon > 0$, а для состояний с $\varepsilon < 0$ возникает область запрещенных значений qk около резонанса. Аналогичная ситуация отмечена для линейной поляризации в /3/. Это различие в поведении системы в случаях левой и правой круговых поляризаций согласуется с известным фактом, что для классического электрона циклотонный резонанс (набор энергии) имеет место при взаимодействии с волной одной поляризации, а для позитрона – с волной противоположной поляризации /6/. Таким образом, случай левополяризованной волны является выделенным в том смысле, что только для этой поляризации в решении одночастичной задачи не возникает области запрещенных значений (qk).

Уравнение Дирака диагонализуется аналогичным образом. Преобразование волновой функции с помощью матриц U_1 и $U_2 = 1 + \hat{k}(a\gamma_1 + b\gamma_2)$, $a = -\frac{e}{2(qk)}\left(\sqrt{eH}y - \frac{e\xi}{\sqrt{2\omega V}}\right)$, $b = \frac{i}{2(qk)}\left(\sqrt{eH}\frac{\partial}{\partial y} \pm \pm \frac{e}{\sqrt{2\omega V}}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)$ приводит к уравнению

$$\left[\hat{q} - im - \frac{\hat{k}}{2(qk)}L + \gamma_5\hat{k}\frac{e}{2(qk)}\left(H \mp \frac{e}{2\omega V}\right)\right]\Phi = 0, \tag{7}$$

где $\hat{k} = k_\mu\gamma_\mu$, γ_μ, γ_5 – обычные дираковские матрицы. Уравнение (5) приводит к следующим выражениям для энергии и импульса:

$$\begin{aligned} q_3 &= p + (n_1 + 1/2)\omega_1 + (n_2 + 1/2)\omega_2 - \frac{e}{\varepsilon - p}(H \mp e/2\omega V), \\ q_0 &= \varepsilon + (n_1 + 1/2)\omega_1 + (n_2 + 1/2)\omega_2 - \frac{e}{\varepsilon - p}(H \mp e/2\omega V), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varepsilon^2 = p^2 + m^2 + e(H \mp e/2\omega V)(1 - \sigma)$, $\sigma = \pm 1$.

Как было указано выше, в случае левополяризованной волны квантовые числа q_3, n_1, n_2 однозначно определяют энергию системы q_0, причем $-\infty < q_3 < +\infty$. Это позволяет доказать полноту системы волновых функций для этого случая. Этот факт обеспечивает возможность построения вторично-квантованной теории и рассмотрения процессов с участием других полей. Анализируя выражения

(4), (6) для q_0, ω_1, ω_2, можно убедиться, что переходы между состояниями с $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ с малым изменением квантовых чисел n_1, n_2 невозможны, так как всегда

$$\omega_1^{(+)} > \omega > \omega_1^{(-)}, \quad \omega_2^{(+)} > 0 > \omega_2^{(-)},$$

где знаки ($\pm$) в данном случае определяются знаками ε (ср. с /7/). Изложенный в настоящей работе одночастичный подход представляется, однако, не вполне удовлетворительным ввиду отсутствия симметрии между состояниями с $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$, как это имеет место для свободных частиц. Кроме того, остается открытым вопрос о возможности реализации исследованных стационарных состояний при учете включения взаимодействия.

Однако эти проблемы выходят за рамки настоящего сообщения.

Авторы благодарны А. И. Никишову за полезное обсуждение.

Поступила в редакцию
14 сентября 1972 г.

Литература

1. И. Берсон. ЖЭТФ, 56, 1627 (1969).
2. А. Д. Газазян. ТМФ, 10, 388 (1972).
3. Д. И. Абакаров, В. П. Олейник. ТМФ, 12, 78 (1972).
4. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, Физматгиз, М., 1959 г.
5. А. С. Давыдов. Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963 г.
6. P. I. Redmond. Journ. Math. Phys., 6, 1163 (1965).
7. В. П. Олейник. ЖЭТФ, 61, 27 (1971).
8. И. Я. Берсон. Изв. АН Латв. ССР, сер. физ. и техн. наук № 5, 3 (1969).