Краткие сообщения по физике № 1 январь 1971

ОБ УЕДИНЕННЫХ ВОЛНАХ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

Р. Р. Рамазашвили

В работе /1/ были исследованы нелинейные электрозвуковые волны в плазме, через которую распространяется высокочастотная (ВЧ) электромагнитная волна. В частности, было показано, что существуют уединенные волны плотности, бегущие вдоль направления распространения ВЧ волны. Ниже будет показано, что возможны уединенные волны плотности, распространяющиеся вдоль электрического вектора ВЧ волны. Характерные пространственные размеры таких волн меньше c/ω (c – – скорость света, а ω – частота ВЧ волны).

В основу рассмотрения положены уравнения двухжидкостной гидродинамики с электронным давлением. Ионы считаются холодными и их высокочастотным движением в поле электромагнитной волны пренебрегается. Разбив все величины на две части, медленно изменяющуюся и быстропеременную, и применив стандартную процедуру усреднения по высокой частоте, получим следующую систему уравнений для медленно изменяющихся плотности и скорости электронов:

$$m\left(\frac{\partial\vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e\nabla)\vec{v}_e\right) = -e\nabla\varphi - \frac{m}{2}\nabla\left\langle\left(\frac{e}{m}\int^t d\tau\vec{E}(\vec{r},\tau)\right)^2\right\rangle - T_e\nabla\ln n_e,$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_e\vec{v}_e + \frac{e}{m}\left\langle\tilde{n}_e\int^t d\tau\vec{E}(\vec{r},\tau)\right\rangle\right) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\tilde{n}_e$ и $\tilde{\vec{E}}$ – быстропеременные части плотности электронов и электрического поля в плазме, а скобки $\langle\cdots\rangle$ означают усреднение по высокой частоте. При получении этих уравнений предполагалось, что как медленные, так и быстропеременные величины меняются в пространстве достаточно плавно, так что выполняются неравенства

$$1/\tau \gg \left|\vec{v}_e\right|, \left|\tilde{\vec{v}}_e\right|, v_{Te} \qquad (2)$$

где l – минимальный характерный пространственный масштаб задачи, τ – характерное время изменения быстрых величин, а $v_{Te} = \sqrt{T_e/m}$ и $\tilde{\vec{v}}_e$ – тепловая и быстропеременная скорости электрона соответственно. Таким образом влияние ВЧ движения на медленное движение проявляется в виде средней силы, действующей на электроны в неоднородном ВЧ поле /2/ и в виде потока увличения электронов в уравнении непрерывности. К уравнениям (1) надо присоединить уравнения движения и непрерывности для ионов и уравнение Пуассона, в которых ВЧ движение в явном виде не учитывается, и уравнения для $\tilde{n}_e$ и $\tilde{\vec{E}}$, которые в условиях (2) записываются в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{e n_e}{m}\int^t d\tau \tilde{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\right) = 0, \\ &\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{\vec{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\omega_{Le}^2}{c^2}\int^t d\tau \tilde{\vec{E}}(\vec{r},\tau)\right) = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m}$ – ленгмюровская частота электронов. Проведенная выше система уравнений получена, например, в работе /3/. Если $\omega \gg \omega_{Le}$ для медленных движений с малым по сравнению с c/ω пространственным масштабом можно решить (3) методом теории возмущений по плотности электронов и выразить $\vec{E}$ через внешнее поле $\vec{E}_0$ и n_e. Предполагая, что медленные величины меняются только вдоль параллельной $\vec{E}_0$ оси oz, запишем среднюю силу, действующую на электрон в ВЧ поле, в виде /4/

$$f_z = -\frac{m\vec{v}_E^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \tag{4}$$

где $\vec{v}_E = e\vec{E}_0/m\omega$ – амплитуда скорости колебаний электрона во внешнем поле. В этом же приближении поток увличения электронов обращается в ноль.

Учитывая вышесказанное и интересуясь стационарными движениями, запишем систему уравнений, описывающих нелинейные ионнозвуковые волны в плазме, находящейся в ВЧ поле

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -4\pi(en_e + e_i n_i),$$

$$n_i v_i = -n_0 u,$$

$$\frac{1}{2}v_i^2 + \frac{e_i}{M}\varphi = \frac{1}{2}u^2,$$

$$\frac{e}{m}\varphi + \frac{\vec{v}_E^2}{2}\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + v_{Te}^2 \ln\frac{n_e}{n_0} = \frac{\vec{v}_E^2}{2}\frac{\omega_{Le}^{02}}{\omega^2}, \tag{5}$$

где n_0 – плотность электронов в точке, где $\varphi = 0$, u – скорость движения нелинейной волны, а $\omega_{Le}^{02} = \omega_{Le}^2 n_0/n_e$. В последнем уравнении ввиду низкочастотности исследуемых нелинейных волн пренебрежено инерцией электронов. Отметим, что при $\vec{E}_0 = 0$ эта система описывает хорошо исследованные нелинейные ионно-звуковые волны /5/.

Исключив из системы (5) n_i, v_i и φ, получим дифференциальное уравнение второго порядка для $N = n_e/n_0$, первый интеграл которого записывается в виде:

$$\left(\frac{dN}{dz}\right)^2 = \frac{2\omega_{Li}^{02}N^2}{(c_s^2 + Nv_s^2)^2}\left\{(N-1)\left[c_s^2 + \frac{v_s^2}{2}(N+1)\right] + \right.$$
$$\left. + u^2\left[\sqrt{1 - 2\frac{v_s^2}{u^2}(N-1) - 2\frac{c_s^2}{u^2}\ln N} - 1\right]\right\}. \qquad (6)$$

Здесь $c_s^2 = T_e/M$, $v_s^2 = \omega_{Li}^{02} v_E^2/2\omega^2$, $\omega_{Li}^{02} = m\omega_{Le}^{02}/M$, а постоянная интегрирования выбрана из условия $dN/dz = 0$ при $N = 1$. Добавив к правой части уравнения (6) произвольную постоянную, можно построить различные решения, которые должны описывать периодические нелинейные волны. Выбранное в (6) значение постоянной интегрирования соответствует особому случаю, когда решение имеет вид уединенной волны, представляющей собой симметричный горб плотности. (Характер решений легко прослеживается по интегральным кривым на фазовой плоскости /5/).

Скорость распространения уединенной волны определяется из того условия, что производная плотности должна менять знак в той точке, где плотность достигает максимального значения, то-есть $dN/dz = 0$ при $N = N_{max}$. Это дает

$$u^2 = \frac{(N_{max}-1)^2\left(c_s^2 + \frac{v_s^2}{2}(N_{max}+1)\right)^2}{2\left\{(N_{max}-1)\left(c_s^2 + \frac{v_s^2}{2}(N_{max}-1)\right) - c_s^2 \ln N_{max}\right\}} \qquad (7)$$

Это уравнение связывает скорость распространения уединенной волны u с ее амплитудой. При стремлении амплитуды уединенной волны $N_{max} - 1$ к нулю u^2

стремится к величине $c_s^2 + v_s^2$, что совпадает с квадратом фазовой скорости ионнозвуковых волн в рассматриваемых условиях /6/.

Профиль уединенной волны будет описываться формулой

$$z = \pm \int_{N_{max}}^{N} \frac{dN(c_s^2 + Nv_s^2)}{\sqrt{2}\,\omega_{Li}^0 N \left\{(N-1)\left(c_s^2 + \frac{v_s^2}{2}(N+1)\right) + u^2\left[\sqrt{1 - 2\frac{v_s^2}{u^2}(N-1) - 2\frac{c_s^2}{u^2}\ln N} - 1\right]\right\}^{1/2}} \tag{8}$$

В этом уравнении интегрирование производится в той области изменения N, где правая часть уравнения (6) положительна. Максимальное и минимальное значения N должны совпадать с нулями dN/dz. Нетрудно показать, что выражение в фигурных скобках в знаменателе правой части (8) имеет два отличных от нуля корня $N_1 = 1$ и $N_2 = N_{max} > 1$ и в области $1 < N < N_{max}$ оно положительно при условии, что

$$u^2 > c_s^2 + v_s^2 \tag{9}$$

Таким образом приходим к заключению, что исследуемая волна является волной сжатия. Можно показать, что профиль уединенной волны с малой амплитудой $N_{max} - 1 \ll 1$ дается формулой

$$N - 1 = \frac{3(c_s^2 + v_s^2)(u^2 - c_s^2 - v_s^2)}{u^2(2c_s^2 + 3v_s^2)} \times$$

$$\times \operatorname{sch}^2\left(\frac{\omega_{Li}^0}{2\sqrt{c_s^2 + v_s^2}}\sqrt{1 - \frac{c_s^2 + v_s^2}{u^2}}\, z\right). \tag{10}$$

Таким образом, плотность в слабой уединенной волне спадает от максимального значения до n_0 на расстояниях порядка

$$\frac{\sqrt{c_s^2+v_s^2}}{\omega_{Li}^0}\,\frac{u}{\sqrt{u^2-c_s^2-v_s^2}}\sim\frac{\sqrt{c_s^2+v_s^2}}{\omega_{Li}^0(N_{max}-1)}. \qquad (11)$$

В случае произвольных амплитуд также легко получить простые формулы, описывающие профиль волны вблизи максимума плотности или в области, где $N-1\ll 1$

Зная профиль уединенной волны, можно найти условие малости ее пространственных размеров по сравнению с длиной ВЧ волны, предположенной при получении формулы (4)

$$N_{max}-1\gg\frac{\omega^2(c_s^2+v_s^2)}{\omega_{Li}^{02}c^2}=\frac{\frac{1}{2}\tilde{v}_E^2+v_{Te}^2\frac{\omega^2}{\omega_{Le}^{02}}}{c^2} \qquad (12)$$

Условия (2) для найденного выше решения удовлетворяются всегда.

Сравнивая результаты работы /5/ с полученными выше, видим, что ВЧ поле привело к увеличению характерного размера и минимальной скорости уединенной волны в $\sqrt{1+v_s^2/c_s^2}$ раз, что в сильных полях может быть существенно больше единицы.

Выше величина $u^2-2v_s^2(N-1)-2c_s^2\ln N$ считалась положительной. Поэтому допустимы не все значения амплитуды и скорости уединенной волны. Легко найти максимальные значения этих величин N_k и u_k. С одной стороны, они связаны уравнением

$$u_k^2=2v_s^2(N_k-1)+2c_s^2\ln N_k, \qquad (13)$$

а с другой – условием $(dN/dz)_{N=N_k}=0$, то-есть

$$u_k^2=(N_k-1)\left\{c_s^2+\frac{1}{2}v_s^2(N_k+1)\right\} \qquad (14)$$

Решив эти уравнения численно для разных значений v_s^2/c_s^2, увидим (см. таблицу), что с ростом электрического поля N_k уменьшается, а критическое число Маха $M_k = u_k/\sqrt{c_s^2 + v_s^2}$ увеличивается.

v_s^2/c_s^2	0	1/3	1/2	1	2	3	∞
N_k	3,51	3,27	3,22	3,14	3,08	3,06	3
M_k^2	2,51	2,91	3,04	3,28	3,52	3,62	4

Выражаю благодарность Ю. М. Алиеву, Л. М. Горбунову, И. С. Данилкину и В. П. Силину за полезные советы и обсуждения.

Поступила в редакцию
5 ноября 1970 г.

Литература

1. В. Ц. Гурович, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 56, 1952 (1969).
2. А. В. Гапонов, М. А. Миллер. ЖЭТФ, 34, 242 (1958).
3. Л. М. Горбунов, препринт ФИАН № 174, 1969 г.
4. Л. М. Горбунов, ЖЭТФ, 55, 2298 (1968).
5. Р. З. Сагдеев. Вопросы теории плазмы. Атомиздат, т.4, 20, 1964 г.
6. Ю. М. Алиев, В. П. Силин. ЖЭТФ, 48, 901 (1965).