7/3

Краткие сообщения по физике № 4 апрель 1971

О СДВИГОВОЙ СИММЕТРИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Л. И. Гудзенко

Корреляционная функция

$$X(t,\tau) \equiv \langle x(t)[x(t+\tau)]^{*}\rangle, \qquad (\langle x(t)\rangle \equiv 0)$$

стационарного случайного процесса, как известно, обладает простым свойством симметрии относительно сдвига τ:

$$X(t,-\tau) \equiv [X(t,\tau)]^{*}. \tag{1}$$

Верно и обратное. Говоря точнее – для равномерно непрерывной по t и τ корреляционной функции сдвиговая симметрия всегда сопровождается независимостью от t. Это свойство обобщается на более широкие классы случайных процессов.

Введем в рассмотрение "скользящую амплитуду" произвольной функции $f(t)$ с помощью формулы

$$f^{(\theta,\sigma,\Theta)} \equiv \frac{1}{\Theta}\int\limits_{\theta}^{\theta+\Theta} f(t)\exp\left(-2\pi i\sigma\frac{t}{\Theta}\right)dt.$$

Если $f(t+T) \equiv f(t)$, то при всех целых $\sigma = s$ и при $\Theta = T$ амплитуда $f^{(\theta,s,T)}$ не зависит от θ и имеет смысл набора коэффициентов Фурье. Скользящую амплитуду $X^{(\theta,\sigma,\Theta)}(\tau)$ корреляционной функции будем называть корреляционной амплитудой. Из определения корреляционной функции сразу следует условие симметрии

$$X(t,\tau) = \left[X(t+\tau,-\tau)\right]^{*}. \qquad (2)$$

Его можно переписать для корреляционной амплитуды

$$X^{(\theta,\sigma,\theta)}(\tau) \equiv \left[X^{(\theta+\tau,-\sigma,\theta)}(-\tau)\right]^{*} \exp\left|2\pi i\sigma \frac{\tau}{\theta}\right|. \qquad (3)$$

Если $x(t)$ – периодически-нестационарные флуктуации, т.е. $X(t+T,\tau) = X(t,\tau)$, для целых $\sigma = s$ при $\theta = T$ согласно (3) напишем

$$X^{(\theta,s,T)}(\tau) = \left[X^{(\theta,-s,T)}(-\tau)\right]^{*} \exp\left|2\pi i s \frac{\tau}{T}\right|. \qquad (4)$$

Покажем, что верно и обратное. Если корреляционная функция равномерно непрерывна по t и τ, то выполнение условия (4) для какого-нибудь целого $s = s_0$ приводит к ее периодичности по t.

Учитывая обязательное для корреляционной функции условие (3), напишем согласно (4)

$$X^{(\theta+NT,s_0,T)}(\tau) = X^{(\theta,s_0,T)}(\tau), \quad N = 0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (5)$$

Допустим, что из формулы (5) не следует независимость $X^{(\theta,s_0,T)}(\tau)$ от θ. Предположим, что при $\tau = \tau_0$, $\tau_0 \neq 0$ имеются такие значения θ_0 и θ_0', что

$$\left|X^{(\theta_0,s_0,T)}(\tau_0) - X^{(\theta_0',s_0,T)}(\tau_0)\right| = c > 0. \qquad (6)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\left|X^{(\theta,s_0,T)}(\tau_0+\delta) - X^{(\theta,s_0,T)}(\tau_0)\right| < \frac{c}{2} \text{ при } |\delta| < \varepsilon.$$

Положив $N = E\left[(\theta_0 - \theta_0' - \tau_0)/\varepsilon\right]$, где $E(\xi)$ – целая часть вещественного числа ξ, получим

$$\theta_0 + N\tau_0 = \theta_0' + (N+1)(\tau_0 + \delta), \quad |\delta|<\varepsilon. \qquad (7)$$

Обозначив $\theta_N \equiv \theta_0 + N\tau_0$, имеем далее

$$\left| X^{(\theta_N, s_0, T)}(\tau_0) - X^{(\theta_N, s_0, T)}(\tau_0 + \delta) \right| < \frac{c}{2},$$

$$\left| X^{(\theta_0', s_0, T)}(\tau_0) - X^{(\theta_0', s_0, T)}(\tau_0 + \delta) \right| < \frac{c}{2},$$

а значит, согласно (5), (7)

$$\left| X^{(\theta_0, s_0, T)}(\tau_0) - X^{(\theta_N, s_0, T)}(\tau_0 + \delta) \right| < \frac{c}{2},$$

$$\left| X^{(\theta_0', s_0, T)}(\tau_0) - X^{(\theta_N, s_0, T)}(\tau_0 + \delta) \right| < \frac{c}{2}.$$

Последние два неравенства противоречат предположению (6). Значит, при $\tau \neq 0$ из (4) следует

$$X^{(\theta, s_0, T)}(\tau) = X^{(\theta_0, s_0, T)}(\tau). \qquad (8)$$

При $\tau = 0$ независимость корреляционной амплитуды $X^{(\theta, s_0, T)}(0)$ от θ получается из (8) предельным переходом.

Наконец, из выполнения условия (4), а значит, и (8), для какого-нибудь одного целого $s = s_0$ следует

$$X(\theta + T, \tau)\exp\left[-2\pi i s_0(\theta + T)/T\right] = X(\theta, \tau)\exp(-2\pi i s_0 \theta/T),$$

что эквивалентно искомому утверждению

$$X(t + T, \tau) \equiv X(t, \tau). \qquad (6)$$

Стационарность флуктуаций требует более детального, чем (4), условия. Именно, условие (1) не только необходимо, согласно (2), для стационарности, но и достаточно. Действительно, сравнивая (1) и (2), напишем для любого целого N: $X(t, \tau) = X(t + N\tau, \tau)$.

Рассуждая теперь аналогично изложенному, отсюда получим

$$X(t,\tau) \equiv X(t_0,\tau).$$

Использованный здесь прием допускает обобщения. Пусть, например,

$$f_0(t + T) = e^q f_0(t). \tag{10}$$

С целью анализа функций введем "модулированную амплитуду", полагая для произвольной функции $f(t)$

$$f^{(\theta,\varkappa,\sigma,\Theta)} \equiv \frac{1}{\Theta}\int_{\theta}^{\theta+\Theta} f(t)\exp\left[(\varkappa - 2\pi i\sigma)\frac{t}{\Theta}\right]dt.$$

Для функций $f(t) = f_0(t)$ вида (10) при $\varkappa = q$, $\Theta = T$ и любом целом $\sigma = s$ модулированная амплитуда не зависит от θ. И обратно, если при каких-либо $\varkappa$, вещественном $\Theta \neq 0$ и целом σ модулированная амплитуда $f^{(\theta,\varkappa,\sigma,\Theta)}$ не зависит от θ, то функция $f(t)$ обладает свойством (10).

Упомянем в связи с этим о более широком, чем периодически-нестационарные флуктуации, классе случайных процессов, для корреляционных функций которых*)

$$X(t + T,\tau) = X(t,\tau)e^q. \tag{11}$$

Условие (2) симметрии корреляционной функции, переписанное для ее модулированной амплитуды, принимает вид

$$X^{(\theta,q,s,T)}(\tau) = \left[X^{(\theta,q,-s,T)}(\tau)\right]^* \exp\left[(2\pi i\sigma - \varkappa)\frac{\tau}{\Theta}\right]. \tag{12}$$

---

*) Здесь, конечно, число q может быть только вещественным.

Таким образом, процессы типа (11) всегда обладают свойством

$$X^{(\theta,q,s,T)}(\tau) = \exp\left[(2\pi is - q)\frac{\tau}{T}\right]\left[X^{(\theta,q,-s,T)}(\tau)\right]^*, \quad (13)$$

где q и T - вещественные числа, соответствующие (11), s - любое целое. При равномерной непрерывности $X(t,\tau)$ условие сдвиговой симметрии (13) достаточно для принадлежности флуктуаций $x(t)$ к классу (11). Чтобы пояснить это утверждение, заметим, что из формул (12), (13) для любого целого числа N следует

$$X^{(\theta+N\tau,q,s,T)}(\tau) = X^{(\theta,q,s,T)}(\tau).$$

Из-за громоздкости не будем называть здесь более сложные модели, в которых, например, $q = q(t)$, $T = T(t)$ - функции заданного вида с одним или несколькими параметрами.

Формулы сдвиговой симметрии векторных случайных процессов подобны рассмотренным. Корреляционная матрица

$$X_{k,l}(\tau) \equiv \langle x_k(t)\left[x_l(t+\tau)\right]^*\rangle,$$

$$(\langle x_k(t)\rangle \equiv \langle x_l(t)\rangle \equiv 0),$$

очевидно, обладает свойством

$$X_{k,l}(t,\tau) \equiv \left[X_{l,k}(t+\tau,-\tau)\right]^*. \quad (14)$$

Отсюда для корреляционных амплитуд

$$X_{k,l}^{(\theta,\sigma,\theta)}(\tau) \equiv \frac{1}{\theta}\int_{\theta}^{\theta+\theta} X_{k,l}(t,\tau)\exp\left|-2\pi i\sigma\frac{t}{\theta}\right|dt$$

получим

$$X_{k,l}^{(\theta,\sigma,\theta)}(\tau) \equiv \left[X_{l,k}^{(\theta+\tau,-\sigma,\theta)}(-\tau)\right]^{*} \exp\left(2\pi i\sigma \frac{\tau}{T}\right). \quad (15)$$

Сдвиговая же симметрия матрицы корреляционных модулированных амплитуд описывается формулой

$$X_{k,l}^{(\theta,\varkappa,\sigma,\theta)}(\tau) \equiv \left[X_{l,k}^{(\theta+\tau,\varkappa,-\sigma,\theta)}(-\tau)\right]^{*} \exp\left[(2\pi i\sigma - \varkappa) \frac{\tau}{\theta}\right]. \quad (16)$$

Для стационарных флуктуаций согласно (14) имеем

$$X_{k,l}(t,\tau) = \left[X_{l,k}(t,-\tau)\right]^{*}, \quad (17)$$

и далее при целых N

$$X_{k,l}(t + N\tau,\tau) = X_{k,l}(t,\tau).$$

В случае равномерной непрерывности по t и τ из (17) следует, таким образом, $X_{k,l}(t,\tau) \equiv X_{k,l}(t_o,\tau)$, т.е. стационарность вектора флуктуаций. Аналогично из формул (15) и (16) получим условия (необходимые и достаточные) соответственно для вектора периодически-нестационарных флуктуаций и вектора флуктуаций типа (11):

$$X_{k,l}^{(\theta,s,T)}(\tau) \equiv \left[X_{l,k}^{(\theta,-s,T)}(-\tau)\right]^{*} \exp\left(2\pi i s \frac{\tau}{T}\right),$$

$$X_{k,l}^{(\theta,q,s,T)}(\tau) \equiv \left[X_{l,k}^{(\theta,q,-s,T)}(-\tau)\right]^{*} \exp\left[(2\pi i s - q)\frac{\tau}{T}\right].$$

Поступила в редакцию
4 февраля 1971 г.