Краткие сообщения по физике № 5 май 1971

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов

Представление когерентных состояний /1/ интенсивно используется в последнее время для изучения различных квадратичных систем. Такие системы легко можно описать на языке фейнмановских интегралов /2/, причем существует взаимно-однозначное соответствие между этими подходами. Для любой системы, для которой заменами переменных фейнмановский интеграл может быть сведен к гауссовскому, можно ввести когерентные состояния, и наоборот. Однако расчеты в представлении когерентных состояний прозрачны и в этом представлении легко прослеживается связь квантового и классического подходов. Целью настоящей работы является построение когерентных и энергетических состояний для функции Грина, изучение адиабатического приближения произвольных нестационарных квадратичных гамильтонианов (конечный и бесконечный набор осцилляторов). Мы следуем общей схеме, предложенной в /3,4,5/ для получения перечисленных результатов в случае заряженного осциллятора, движущегося в переменных однородных произвольно направленных электрическом и магнитном полях (постоянные поля являются частным случаем)*).

---

*) В недавней работе Хольца /6/ аналогичным методом найдены интегралы движения, когерентные состояния и амплитуда перехода между ними в случае N - мерной нестационарной квадратичной формы.

Рассмотрим систему с N степенями свободы и с эрмитовым гамильтонианом вида

$$H(t) = A_{i,k}(t)Q_iQ_k + B_i(t)Q_i, \qquad (1)$$

$$(\hbar = c = 1), \quad i,k = 1,\ldots,2N,$$

где $Q_1 = p_1,\ldots,Q_N = p_N$, $Q_{N+1} = q_1,\ldots,Q_{2N} = q_N$, а эрмитова матрица $A(t)$ и действительный вектор $\vec{B}(t)$ являются заданными функциями времени. В дальнейшем формы типа (1) будем записывать в виде: $H = \tilde{Q}A\vec{Q} + \tilde{B}\vec{Q}$. В системе (1) существует $2N$ эрмитовых инварианта /5/, которые запишем в виде:

$$\vec{I}(t) = \Lambda(t)\vec{Q} + \vec{\delta}(t), \qquad \partial\vec{I}/\partial t - i\left[\vec{I},H\right] = 0, \qquad (2)$$

где вектор $\vec{\delta}(t)$ и действительная матрица $\Lambda(t)$, удовлетворяющие уравнениям: $\dot{\Lambda} = i\Lambda\sigma_2(A + A^*)$, $\dot{\vec{\delta}}(t) = i\Lambda\sigma_2\vec{B}$, причем σ_2 – блочная матрица Паули, находятся по формулам

$$\Lambda = \tilde{T}\exp\left[i\int_0^t \sigma_2(A + A^*)d\tau\right], \qquad \vec{\delta} = i\int_0^t \Lambda\sigma_2\vec{B}d\tau. \qquad (3)$$

Легко убедиться, что $\left[I_i,I_k\right] = \left[Q_i,Q_k\right]$. Это ясно и без проверки, поскольку (2) соответствует развитию операторов координат и импульсов с помощью оператора эволюции $\vec{I} = S^{-1}\vec{Q}S$, и в этой форме сохранение коммутационных соотношений очевидно. В качестве интегралов движения может выбран вектор $\vec{I}^1 = C\vec{I}$, где C – симплектическая матрица, сохраняющая эрмитовость и коммутационные соотношения, что соответствует другому выбору начальных условий в (3) или каноническому преобразованию. Ясно, что оператор эволюции также задает каноническое преобразование, как и в классической механике. Следуя /3,5/, вводим операторы уничтожения $A_\alpha = (iI_\alpha + I_{N+\alpha})/\sqrt{2}$, $\alpha = 1,\ldots,N$, такие что $\left[A_\alpha,A^+_\beta\right] = \delta_{\alpha\beta}$, и строим когерентные состояния $|\vec{\alpha};t\rangle$ как собственные функции этих операторов. Для этого сначала построим вакуум

$$|\vec{0};t\rangle = \pi^{-N/4}\exp\left[(-1/2)\vec{q}\mu\vec{q} + \vec{\nu}_0\vec{q} + \varphi(t)\right],$$

$$\mu = i\lambda_p^{-1}\lambda_q, \quad \vec{\nu}_0 = -i\lambda_p^{-1}\vec{\Delta},$$

$$\varphi = \int_0^t d\tau\left\{-Sp(A_1\lambda_p^{-1}\lambda_q) + i\vec{\Delta}\lambda_p^{-1}\,{}^{T}A_1\lambda_p^{-1}\vec{\Delta} + i\vec{b}_1\lambda_p^{-1}\vec{\Delta} - SpA_2\right\}, \tag{4}$$

$$\lambda_p = \lambda_3 + i\lambda_1, \quad \lambda_q = \lambda_4 + i\lambda_2, \quad \Delta_\alpha = i\delta_\alpha + \delta_{\alpha+N}.$$

Здесь введены обозначения, отвечающие разбиению матриц A и Λ на блоки размерности $N\times N$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_3 \lambda_4 \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Вакуум (4) удовлетворяет уравнению Шредингера и условию $A_\alpha|0;t\rangle = 0$. В соответствии с отмечавшейся неоднозначностью выбора инварианта $\vec{I}$, вакуум также выбирается неоднозначно, что отвечает рассмотрению задачи в различных системах координат в фазовом пространстве (q,p), связанных каноническим преобразованием. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в другой работе. Физический смысл инвариантов I_α состоит в том, что их собственные числа задают начальные значения классической траектории в фазовом пространстве средних величин $\langle\vec{p}\rangle$, $\langle\vec{q}\rangle$ (см. /3/). Когерентное состояние $|\vec{\alpha};t\rangle$ строится из (4) с помощью оператора сдвига $D(\vec{\alpha}) = \exp(\vec{\alpha}\vec{I}^+ - \vec{\alpha}^*\vec{I})$: $|\vec{\alpha};t\rangle = D(\vec{\alpha})|\vec{0};t\rangle$. Поскольку $\vec{I}$ и $\vec{I}^+$ - инварианты и $\vec{\alpha}$ - постоянный комплексный вектор, $|\vec{\alpha};t\rangle$ удовлетворяет уравнению Шредингера и соотношению $\vec{I}|\vec{\alpha};t\rangle = \vec{\alpha}|\vec{\alpha};t\rangle$. Запишем когерентное состояние в двух удобных для дальнейшего формах

$$|\vec{\alpha};t\rangle = \pi^{-N/4}\exp(\sigma + \vec{\nu}\vec{q} - (1/2)\vec{q}\mu\vec{q}) \qquad (5а)$$

и

$$|\vec{\alpha};t\rangle = |\vec{0};t\rangle\exp\left[(-1/2)|\vec{\alpha}|^2 + \vec{s}\vec{\alpha} - (1/2)\vec{\alpha}\hat{t}\vec{\alpha}\right], \qquad (5б)$$

где

$$\sigma = \varphi(t) - \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\Delta}^* - \vec{\Delta}\lambda_p^{-1}\,{}^T\lambda_p^+)\vec{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{4}\vec{\alpha}(\lambda_p^*\lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^+ - \lambda_q^*\lambda_p^+)\vec{\alpha},$$

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}_0 + (1/\sqrt{2})(\lambda_q^+ - \lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^+)\vec{\alpha}, \qquad \mu = i\lambda_p^{-1}\lambda_q; \qquad (6)$$

$$\hat{t} = (1/2)(\lambda_q^*\lambda_p^+ - \lambda_p^*\lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^+)$$

$$\vec{s} = (1/\sqrt{2})(\vec{\Delta}^* - \lambda_p^*\lambda_p^{-1}\vec{\Delta} + \lambda_q^*\vec{q} - \lambda_p^*\lambda_p^{-1}\lambda_q\vec{q}).$$

Поскольку $|\vec{\alpha};t\rangle$ задает производящую функцию для собственных состояний операторов $A_\alpha^+A_\alpha$ /1,3/, написав соответствующее разложение, легко получить решения $|\vec{n};t\rangle$, где $\vec{n}$ – векторы с положительными целыми компонентами, отвечающие энергетическому представлению

$$|\vec{n};t\rangle = |\vec{0};t\rangle(n_1!\ldots n_N!)^{-1/2}H_{\vec{n}}(\vec{x}), \quad \vec{n} = (n_1,\ldots,n_N), \quad (7)$$

где $H_{\vec{n}}(\vec{x})$ полином Эрмита от N переменных $\vec{x} = (x_1\ldots x_N)$, задаваемый матрицей μ. Свойства этих полиномов хорошо известны (см. /7/). Частные случаи решений (7) см. /3–5/. Интересны простые частные случаи, свободное движение $H = p^2/2$, $A = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, и перевернутый осциллятор $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$, $A = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$.

В этих случаях спектр гамильтонианов не дискретен. Тем не менее в задачах существуют и вакуумы, и когерентные состояния, и решения (7). Это и очевидно, поскольку такие операторы H эрмитовы, и унитарный оператор эволюции (функция Грина, являющаяся квадратичной экспонентой) переводит пакеты, построенные в момент $t = 0$ в виде квадратичных экспонент (когерентные состояния) или полиномов Эрмита (см. (7)), в те же функции. Поэтому когерентны и энергетические состояния, причем бесконечное число их (симплектическая матрица C) существует для любых квадратичных систем, за исключением вырожденных случаев. Физический смысл этих состояний и связь с минимальностью соотношения неопределенности будут подробнее рассмотрены в другой работе. Имея (5б) и используя полноту системы когерентных состояний, легко получить явное выражение для функции Грина, беря гауссовский интеграл по начальным координатам в фазовом пространстве (см. /3–5/)

$$G(2,1) = 2^N|\vec{0};2\rangle\langle\vec{0};1|(\det P)^{-1/2}\exp\left(\frac{1}{2}\,\vec{l}P^{-1}\vec{l}\right),$$

$$P = \begin{pmatrix} t(2) & it(2) \\ it(2) & -t(2) \end{pmatrix} + \sigma_3\begin{pmatrix} 2 + t^*(1) & it^*(1) \\ it^*(1) & 2 - t^*(1) \end{pmatrix}\sigma_3, \tag{8}$$

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} \vec{s}(2) \\ i\vec{s}(2) \end{pmatrix} + \sigma_3\begin{pmatrix} \vec{s}^*(1) \\ i\vec{s}^*(1) \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Матрицы $t(1)$, $t(2)$ и векторы $\vec{s}(1)$, $\vec{s}(2)$ определены формулами (6). Здесь и в дальнейшем используем известный интеграл

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2}\,\vec{x}a\vec{x} + \vec{b}\vec{x}\right)dx_1\ldots dx_N = (2\pi)^N(\det a)^{-1/2}\exp\left(\frac{1}{2}\vec{b}a^{-1}\vec{b}\right).$$

Получение функции Грина (8) интегрированием по когерентным состояниям (по координатам в фазовом пространстве) полностью эквивалентно взятию фейнмановского интеграла по классическим траекториям, однако технически оно кажется авторам более удобным. Согласно /4,5/ в системе (1) существует $2N$ адиабатических линейных инварианта I_i^{ad}, с помощью которых можно в адиабатическом приближении (медленное изменение матрицы A) построить когерентные состояния и адиабатическую функцию Грина. Легко вычисляется также изменение адиабатических инвариантов, как линейных, так и квадратичных. Данные утверждения соответствуют обобщению теоремы Борна-Фока /8/ на случай конечно- и бесконечно-кратно вырожденных систем /5/. Случай квадратичной системы с бесконечным числом степеней свободы ($N \to \infty$) рассматривается аналогичным образом. В полученных выше формулах необходимо совершать при этом предельный переход. Естественно возникают в этом случае неэквивалентные представления. Отметим, что соответствие когерентных состояний фазовому пространству и появление в этой задаче полиномов Эрмита от двух переменных исследовалось в недавней работе /9/.

Авторы благодарны М. А. Маркову и Е. С. Фрадкину за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
3 марта 1971 г.

Литература

1. R. J. Glauber. Phys. Rev. Lett., 10, 84 (1963).
2. Р. Фейнман, А. Хиббс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Москва. "Мир" (1968).
3. И. А. Малкин, В. И. Манько. ЖЭТФ, 55, 1014 (1968), 59, 1746 (1970), ТМФ 6, 71 (1971); Phys. Lett., 32A, 243 (1970).
4. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов. ЖЭТФ, 58, 721 (1970); Phys. Lett., 30A, 414 (1969); Phys. Rev., 2D, 1371 (1970)
5. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов. Препринт ФИАН № 97 (1970), препринт ФИАН № 17

(1971).
6. A. Holz. Lett. Nuovo Cimento, 4, 1319 (1970).
7. Х. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Москва, "Наука", 1966 г.
8. M. Born, V. Fock. Zs. f. Phys., 51, 165 (1928).
9. G. S. Agarwal, E. Wolf. Phys. Rev., D2, 2161 (1970).