Краткие сообщения по физике № 5 май 1971

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ВОЗБУЖДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов

В предыдущей работе /1/ были построены в явном виде инварианты, когерентные состояния и функция Грина для N-мерной нестационарной квантовой системы с квадратичным гамильтонианом, а также было обсуждено обобщение теоремы Фока-Борна на случай вырожденных систем и во всех порядках (см. /3,4/). Как отмечалось в /1/, квадратичные системы можно описывать на языке интегралов по траекториям /2/, но расчеты в представлении когерентных состояний более прозрачны и просты. В настоящей работе, следуя схеме работ /3,4/, мы вычисляем амплитуды и вероятности переходов для квадратичных систем, которые стационарны в далеком прошлом и будущем, а также приводим явный вид производящей функции для вероятности переходов между начальными и конечными энергетическими состояниями. Для простого квантового осциллятора перечисленные выше результаты были посуществу получены Хусими /5/. Для N-мерного осциллятора в электромагнитном (однородном) поле Хольц /6/ вычислил амплитуду перехода между когерентными состояниями. Во втором пункте статьи рассматриваем динамическую симметрию N-мерной квадратичной (нестационарной) системы - она может быть описана некомпактной группой $U(N,1)$. Амплитуды переходов могут быть рассматриваемы как матричные элементы представления группы движений N-мерного псевдоэвклидового комплексного пространства. Мы придерживаемся обозначений предыдущей статьи /1/.

1. Амплитуды переходов и производящая функция для вероятности. Будем считать, что при $t<0$ и при $t\to\infty$ гамильтониан системы становится независящим от времени. В этих условиях существуют начальные и конечные состояния стационарной системы, между которыми происходят переходы. Амплитуда перехода из начального состояния $|in\rangle$ в конечное $|f\rangle$ дается матричным элементом $\langle f|t\to\infty\rangle$, где $|t\to\infty\rangle$ есть предел состояния $|in\rangle$ при $t\to\infty$. При этом подразумевается, что начальные условия выбраны правильно, т.е. состояние $|t\rangle$ системы в любой момент $t>0$ дает развитие со временем соответствующего начального состояния $|in\rangle$ и совпадает с ним при $t=0$.

Амплитуды перехода $|\vec{\alpha};in\rangle\to|\vec{\beta};f\rangle$ между когерентными состояниями легко вычисляются взятием гауссовского интеграла по координатам

$$\langle\vec{\beta};f|\vec{\alpha};t\rangle=\langle\vec{0};f|\vec{0};t\rangle\exp\left[-\frac{1}{2}(|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2)+\vec{S}\xi-\frac{1}{2}\xi T\xi\right], \quad (1)$$

где

$$\vec{\xi}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}^{*}\end{pmatrix},\qquad \vec{S}=\begin{pmatrix}\vec{\rho}-(1/2)\tau^{T}\left[(\tilde{\mu}^{-1})^{T}+\tilde{\mu}^{-1}\right]\lambda_p^{-1}\vec{\Delta}\\ -(1/2)\tau_f^{*T}\left[(\tilde{\mu}^{-1})^{T}+\tilde{\mu}^{-1}\right]\lambda_p^{-1}\vec{\Delta}\end{pmatrix},$$

$$T=\begin{pmatrix}\hat{t}-\tau^{T}\tilde{\mu}^{-1}\tau & -\tau^{T}\tilde{\mu}^{-1}\tau_f^{*}\\ -\tau_f^{*T}\tilde{\mu}^{-1}\tau & \hat{t}_f^{*}-\tau_f^{*T}\tilde{\mu}^{-1}\tau_f^{*}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\rho}=(1/\sqrt{2})(\vec{\Delta}^{*}-\lambda_p^{*}\lambda_p^{-1}\vec{\Delta}),$$

$$\tau=(1/\sqrt{2})(\lambda_q^{+}-\lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^{+}),$$

$$\tilde{\mu}=\mu+\mu_f^{*}=i\left[\lambda_p^{-1}\lambda_q-(\lambda_p^{-1}\lambda_q)_f^{*}\right],$$

$$\hat{t}=(1/2)(\lambda_q^{*}\lambda_p^{+}-\lambda_p^{*}\lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^{+}).$$

Амплитуда $\langle\vec\beta;f|\vec\alpha;t\rangle$ есть производящая функция для амплитуды $\langle\vec m;f|\vec n;t\rangle$, связывающая начальное энергетическое состояние $|\vec n;in\rangle$ с конечным $|\vec m;f\rangle$. Из формулы (1), вспоминая формулу для производящей функции для полиномов Эрмита от $2N$ переменных /7/, сразу получаем

$$\langle\vec m;f|\vec n;t\rangle = \frac{\langle\vec 0;f|\vec 0;t\rangle}{(n_1!\ldots n_N!m_1!\ldots m_N!)^{1/2}} H_{\vec M}(\vec X), \qquad (2)$$

где

$$\vec M = (n_1,\ldots,n_N,m_1,\ldots,m_N), \quad \vec X = \vec S T^{-1},$$

а $H_{\vec M}(\vec X)$ есть полином Эрмита от $2N$ переменных, определяемый с помощью матрицы T.

Мы можем вычислить производящую функцию $\varphi(\vec u,\vec v)$ для вероятностей перехода $|\langle\vec m;f|\vec n;t\rangle|^2$ по формуле

$$\varphi(\vec u,\vec v) = \pi^{-2N}\int\langle\vec\beta;f|\vec\alpha;t\rangle\times$$
$$\times\langle v^*\vec\alpha;t|u\vec\beta;f\rangle d^2\alpha_1 d^2\beta_1\ldots d^2\alpha_N d^2\beta_N, \qquad (3)$$

где

$$|u_\alpha| = |v_\alpha| = 1, \quad \alpha = 1,\ldots N.$$

Вычисление интеграла (3) дает следующий результат:

$$\varphi(\vec u,\vec v) = 2^{2N}|\langle\vec 0;f|\vec 0;t\rangle|^2\left[\det W(\vec u,\vec v)\right]^{-1/2}\exp\left(\frac{1}{2}\tilde L W^{-1}\tilde L\right), \quad (4)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} 2+E & D \\ 0 & 2+F\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V\sigma_3 & 0 \\ 0 & U\sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_3 E^*\sigma_3 & \sigma_3 D^*\sigma_3 \\ 0 & \sigma_3 F^*\sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V\sigma_3 & 0 \\ 0 & U\sigma_3\end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$E = \begin{pmatrix} t_1 & it_1 \\ it_1 & -t_1\end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} t_2+t_3^T & i(t_2+t_3^T) \\ -i(t_2+t_3^T) & -t_2-t_3^T\end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} t_4 & it_4 \\ it_4 & -t_4\end{pmatrix},$$
(6)

$$U = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_N \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_N \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ i\vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ i\vec{s}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ i\vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \\ i\vec{s}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V\sigma_3 & 0 \\ & \\ 0 & U\sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Мы разбили матрицу T на блоки размерности $N\times N$: $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$ и аналогично вектор $\vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \end{pmatrix}$. Таким образом W есть матрица $4N \times 4N$, вектор $\vec{L}$ имеет $4N$ компоненты.

Для перехода вакуум-вакуум имеем

$$\langle \vec{0}; f | \vec{0}; t \rangle = 2^{N/2} (\det \tilde{\mu})^{-1/2} \exp\left[\varphi + \varphi_f^* + \frac{1}{2} \vec{\nu}_0 \tilde{\mu}^{-1} \vec{\nu}_0 \right], \tag{9}$$

где $\tilde{\mu}$, $\vec{\nu}_0$ определены в /1/: $\vec{\nu}_0 = -i\lambda_p^{-1}\vec{\Delta}$, $\tilde{\mu} = \mu + \mu_f^*$.

2. Динамическая симметрия. Рассмотрим операторы

$$T_{\alpha\beta} = A_\alpha^+ A_\beta, \quad T_{N+1,\alpha} = A_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{N} A_\beta^+ A_\beta \right)^{1/2},$$

$$T_{\alpha,N+1} = -A_\alpha^+ \left(\sum_{\beta=1}^{N} A_\beta^+ A_\beta + 1 \right)^{1/2}, \quad T_{N+1,N+1} = -\sum_{\beta=1}^{N} A_\beta^+ A_\beta - 1. \tag{10}$$

$(N+1)^2$ операторов $T_{i,k}$, $i,k = 1,\ldots,N+1$, определенные формулой (10), удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[T_{i,k}, T_{m,n} \right] = \delta_{k,m} T_{i,n} - \delta_{i,n} T_{m,k} \tag{11}$$

и таким образом образуют алгебру Ли группы $U(N,1)$. На всех решениях уравнения Шредингера реализуется одно неприводимое лестничное представление $U(N,1)$, причем это то же самое представление, что и для простого N-мерного осциллятора. Поскольку на конечных решениях $|f\rangle$ и на решениях $|t\rangle$ реализуется одно и то же представление, то $|t\rangle = \hat{U}|f\rangle$, где $\hat{U}$ унитарный оператор. Ясно, что амплитуды перехода можно тогда рассматривать как матричные элементы этого оператора $\hat{U}$. В общем случае $\hat{U}$ принадлежит группе движений комплексного псевдоэвклидова пространства размерности N. Если гамильтониан есть однородная квадратичная форма координат и импульсов, тогда $\hat{U}$ принадлежит группе $U(N,1)$. Динамическая симметрия квадратичных систем подробнее рассмотрена в работе /8/.

В заключение отметим, что с помощью существующих в этой системе $2N$ адиабатических инвариантов /1,3/ (см. препринт № 17) можно построить адиабатические амплитуды и вероятности переходов, так же как и алгебру Ли динамической группы. Адиабатическая инвариантность имеет место во всех порядках по параметру адиабатичности.

Результаты настоящей работы могут быть обобщены на случай системы с бесконечным числом степеней свободы ($N \to \infty$). При этом в полученных выше формулах надо совершить предельный переход.

Авторы выражают благодарность М. А. Маркову за обсуждения.

Поступила в редакцию
3 марта 1971 г.

Литература

1. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов. Краткие сообщения по физике, № 4, стр. 20,(1971).
2. Р. Фейнман, А. Хиббс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Москва, "Мир", 1968.
3. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов. ЖЭТФ, 58, 721 (1970); Phys. Lett., 30A, 414 (1969); Phys. Rev., D 2, 1371 (1970); препринт ФИАН № 17 (1971).

4. И. А. Малкин, В. И. Манько. ЖЭТФ, 59, 1746 (1970); Phys. Lett., 32A, 243 (1970); ТМФ 6, 71 (1971).
5. K. Husimi. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 9, 381 (1953).
6. A. Holz. Lett. Nuovo Cimento, 4, 1319 (1970).
7. Х. Бейтмэн и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Москва, "Наука", 1965 г.
8. И. А. Малкин, В. И. Манько, Д. А. Трифонов. Препринт ФИАН № 97 (1970).