Краткие сообщения по физике № 5 май 1971

О ВОЗМОЖНЫХ РАСШИРЕНИЯХ АЛГЕБРЫ ГЕНЕРАТОРОВ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ БИСПИНОРНЫМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

Е. П. Лихтман

В работе /1/ было рассмотрено расширение алгебры $\mathcal{P}$ генераторов группы Пуанкаре посредством введения генераторов спинорных трансляций W_α и $\bar{W}_\beta$

$$\left[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\lambda}\right]_- = i(\delta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda});$$

$$\left[P_\mu, P_\nu\right]_- = 0;$$

$$\left[M_{\mu\nu}, P_\lambda\right]_- = i(\delta_{\mu\lambda}P_\nu - \delta_{\nu\lambda}P_\mu); \left[M_{\mu\nu}, W\right]_- = (1/4)\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]_- W;$$

$$\bar{W} = W^+\gamma_0; \tag{1а}$$

$$\left[W, \bar{W}\right]_+ = \overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu; \left[W, W\right]_+ = 0; \left[P_\mu, W\right]_- = 0, \tag{1б}$$

где $\overset{+}{\gamma}_\mu = \overset{+}{s}\gamma_\mu$, $\overset{+}{s} = (1/2)(1 \pm \gamma_5)$, $\gamma_5^2 = 1$, спинорные индексы опущены. Интересной особенностью этой алгебры является то, что при пространственной инверсии она не переходит сама в себя. Поэтому можно ожидать, что в теории взаимодействующих полей, инвариантной относительно алгебры (1), четность должна не сохраняться, причем форма нарушения P-инвариантности целиком определяется алгеброй (1). Действительно, нами построено несколько реализаций алгебры (1), и во всех случаях четность не сохраняется. Возникает вопрос, каковые другие возможные расширения алгебры $\mathcal{P}$ генераторами биспинорных трансляций, и в какой мере несохранение четности является необходимостью. Ответом на эти вопросы и является эта работа. Обсуждаются также некоторые особенности применения полученных алгебр к описанию свободных и взаимодействующих полей.

Итак, мы постулируем коммутационные соотношения (1а). Чтобы получить замкнутую алгебру, необходимо выяснить, какими могут быть перестановочные соотношения между генераторами трансляций. Мы ограничимся исследованием лишь тех случаев (1), которые в дальнейшем не приведут к нарушению связи спина со статистикой. Поэтому рассмотрим антикоммутаторы операторов W_α и W_β между собой и коммутатор этих операторов с P_μ. Чтобы быть непротиворечивыми, перестановочные соотношения должны удовлетворять тождествам, обобщающим тождествам Якоби

$$
\begin{aligned}
&\left[A_1,\left[A_2,A_3\right]_+\right]_- + \left[A_2,\left[A_3,A_1\right]_+\right]_- + \left[A_3,\left[A_1,A_2\right]_+\right]_- = 0;\\
&\left[A_1,\left[A_2,B_1\right]_-\right]_+ - \left[A_2,\left[B_1,A_1\right]_-\right]_+ + \left[B_1,\left[A_1,A_2\right]_+\right]_- = 0;\\
&\left[A_1,\left[B_1,B_2\right]_-\right]_- + \left[B_1,\left[B_2,A_1\right]_-\right]_- + \left[B_2,\left[A_1,B_1\right]_-\right]_- = 0;\\
&\left[B_1,\left[B_2,B_3\right]_-\right]_- + \left[B_2,\left[B_3,B_1\right]_-\right]_- + \left[B_3,\left[B_1,B_2\right]_-\right]_- = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где A_i обозначает W_α или $\bar{W}_\beta$, а B_i – P_μ или $M_{\mu\nu}$. Тождества (2) являются уравнениями для определения структурных констант алгебры, которые вводятся в виде произвольных чисел в наиболее общий вид возможных перестановочных соотношений. Эти уравнения имеют несколько типов решений. Соответствующие им алгебры можно записать следующим образом:

$$\left[P_\mu, W\right]_- = \overset{+}{a}\gamma_\mu W; \quad \left[W, \bar{W}\right]_+ = \overset{++}{b}\gamma_\mu P_\mu; \quad \left[W, W\right]_+ = 0; \qquad (3а)$$

$$\left[P_\mu, W\right]_- = \bar{a}\gamma_\mu W; \quad \left[W, \bar{W}\right]_+ = \overset{=}{b}\gamma_\mu P_\mu; \quad \left[W, W\right]_+ = 0; \qquad (3б)$$

$$\left[P_\mu, W\right]_- = 0; \quad \left[W, \bar{W}\right] = (\overset{++}{b}\gamma_\mu + \overset{=}{b}\gamma_\mu)P_\mu; \quad \left[W, W\right]_+ = 0, \qquad (3в)$$

где $\overset{+}{a}$, $\bar{a}$ – произвольные комплексные числа, а $\overset{+}{b}$, $\bar{b}$ – произвольные действительные числа.

Рассмотрим некоторые свойства соотношений (3), обусловленные их алгебраической природой. Во-первых, оператор $M_{\mu\nu}$ в силу тождеств (2) не может стоять в правой части перестановочных соотношений (3). Поэтому генераторы трансляций W, $\bar{W}$ и P_μ во всех случаях образуют алгебру. Во-вторых, алгебра (3а) при пространственной инверсии не переходит сама в себя ни при каком нетривиальном выборе чисел $\overset{+}{a}$ и $\overset{+}{b}$, а переходит в алгебру типа (3б). Это создает предпосылки для несохранения четности в теории, основанной на алгебре (3а). В-третьих, нормировка операторов W и $\bar{W}$ никак не определена. Произведя мультипликативную перенормировку этих операторов при соответствующем изменении постоянных $\overset{\mp}{a}$ и $\overset{\mp}{b}$, алгебры (3а) и (3в) можно привести к следующему виду:

$$\left[P_\mu, W\right]_- = \overset{+}{\gamma}_\mu W; \quad \left[W, \bar{W}\right]_+ = \overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu; \quad \left[W, W\right]_+ = 0; \qquad (4а)$$

$$\left[P_\mu, W\right]_- = \overset{+}{\gamma}_\mu W; \quad \left[W, \bar{W}\right]_+ = 0; \quad \left[W, W\right]_+ = 0; \qquad (4б)$$

$$\left[P_\mu, W\right]_- = 0; \quad \left[W, \bar{W}\right]_+ = \overset{+}{\gamma}_\mu P_\mu; \quad \left[W, W\right]_+ = 0; \qquad (4в)$$

$$\left[P_\mu, W\right]_- = 0; \quad \left[W, \bar{W}\right]_+ = \gamma_\mu P_\mu; \quad \left[W, W\right]_+ = 0. \qquad (4г)$$

Алгебра (4а) получена из (3а) при условии, что $\overset{+}{a} \neq 0$ и $\overset{+}{b} \neq 0$. Если в (3а) $\overset{+}{b} = 0$ или $\overset{+}{a} = 0$, то мы получаем алгебры (4б) и (4в) соответственно. Алгебра (3б) получается из (3а) путем пространственной инверсии и поэтому она дает алгебры такого же типа, как алгебры (4а)-(4в). Если же в (3в) $\overset{+}{b}$ или $\overset{-}{b}$ равны нулю, то получается алгебра типа (4в). В противном случае мы имеем дело с алгеброй типа (4г). Из (4) видно, что при условии (1) (см. выше) число расширений $\mathcal{P}$ биспинорными генераторами равно четырем. Наконец, в-четвертых, операторы алгебры (4а) и (4б) допускают унитарное преобразование, не изменяющее вид алгебры

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\alpha}\Psi; \quad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = e^{-i\alpha}\bar{\Psi}; \quad P_\mu \to P'_\mu = P_\mu,$$

а операторы алгебры (4в) и (4г) - унитарное преобразование вида

$$\Psi \to \Psi' = (\overset{+}{a} e^{i\alpha} + \overset{-}{a} e^{i\beta})\Psi; \quad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \Psi(\overset{-}{a} e^{-i\alpha} + \overset{+}{a} e^{-i\beta});$$

$$P_\mu \to P'_\mu = P_\mu,$$

где α и β - произвольные действительные числа. Вследствие этого в теории поля, основанной на одной из алгебр (4), существует сохраняющаяся величина, которую мы, по аналогии с электродинамикой, назовем квазизарядом.

Перейдем к рассмотрению некоторых свойств представлений алгебр (4). Из (4а), а также (4б) можно получить следующие следствия:

$$\left[P_\mu^2, \Psi\right] \neq 0; \tag{5а}$$

$$\left[\overset{-}{a}\Psi, (\overset{-}{a}\Psi)^+\right]_+ = 0, \quad (\overset{-}{a}\Psi \neq 0). \tag{5б}$$

Из неравенства (5а), по-видимому, следует, что спектр масс в неприводимом представлении (НП) алгебры будет непрерывным[ж]). Для реализации соотношения (5б) необходимо вводить индефинитную метрику[жж]). Вследствие этого НП алгебр (4а) и (4б) значительно сложнее, чем представления алгебры (4в) и (4г). Так как алгебра (4в) является подалгеброй алгебры (4г), то НП (4г) можно редуцировать по НП (4в). По этой причине НП алгебры (4в) наиболее просты по своей структуре.

Вернемся к вопросу о несохранении четности. Алгебра (4в) получена из (3а) предельным переходом при $\hat{s} \to 0$, и при пространственной инверсии она не переходит сама в себя. В /1/ указывалось, что следует различать два типа представлений алгебры (4в)[жжж]). В одном из них $W = W^{\circ}$, $\bar{W} = \bar{W}^{\circ}$, $P_\mu = P_\mu^{\circ}$, где индекс $^{\circ}$ означает, что соответствующий оператор выражается билинейным образом через вторично-квантованные поля. При рассмотрении таких представлений мы имеем дело с теорией свободных полей. В представлениях второго типа $W = W^{\circ} + W^{I}$, $\bar{W} = \bar{W}^{\circ} + \bar{W}^{I}$, $P_\mu = P_\mu^{\circ} + P_\mu^{I}$, где индекс ^{I} означает, что соответствующий оператор выражается через произведения полей более высокой степени, чем операторы W°, $\bar{W}^{\circ}$, P_μ°. В этом случае мы имеем дело с теорией взаимодействующих

ж) Проблема возможности получения дискретного спектра оператора P_μ^2 путем расширения группы Пуанкаре подробно рассматривается в /2/.

жж) Соотношение (5б) выполняется и для алгебры (4в). Однако, в представлениях алгебры (4в) можно избежать введения индефинитной метрики, предполагая, что $\bar{s}W = \bar{W}\hat{s} = 0$. В остальных случаях это предположение изменяет вид самой алгебры.

жжж) Это утверждение справедливо для тех алгебр, в которых гамильтониан стоит в правой части перестановочных соотношений, т.е. для алгебр (4а), (4в), (4г).

полей. Нами было рассмотрено несколько представлений алгебры (4в), и во всех случаях взаимодействие полей нарушало P-инвариантность. С другой стороны, в теории поля, инвариантной относительно алгебры (4г), четность, по-видимому, может сохраняться. Так как представление операторов $\hat{s}W$, $\bar{s}W$, $W\bar{s}$, $W\hat{s}$ и P_μ является также представлением операторов $\hat{s}W$, $\overline{W}\bar{s}$, P_μ($\bar{s}W = \overline{W}\hat{s} = 0$) алгебры (4в), то четность может сохраняться и в теории, инвариантной относительно алгебры (4в). Однако в этом случае представление операторов $\hat{s}W^\circ$, $\overline{W}^\circ\bar{s}$, P°_μ алгебры (4в), в отличие от рассмотренных нами случаев, будет приводимым. Таким образом, мы приходим к выводу, что свойства взаимодействия существенно зависят от того, положены ли в основу рассмотрения приводимые или неприводимые представления операторов $\hat{s}W^\circ$, $\overline{W}^\circ\bar{s}$, P°_μ алгебры (4в).

В заключение приношу искреннюю признательность Ю. А. Гольфанду за предложенную тему, а также за постоянное внимание к работе и полезные дискуссии.

Поступила в редакцию
3 марта 1971 г.

Литература

1. Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман. Письма в ЖЭТФ – в печати.
2. L. O'Raifeartaigh. Phys. Rev. Lett., 14, 575 (1965).