

САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ ТРУБЧАТОГО ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ

В. С. Воронин, А. Н. Лебедев

В работе /1/ было исследовано стационарное самосогласованное распределение плотности заряда и тока в бесконечно длинном азимутально-симметричном электронном пучке, частично нейтрализованном ионами. Было показано, что при больших токах J , существенно превышающих предел Альфвена, $J_A = 17000 \beta \gamma$ ампер, распределение тока имеет трубчатый характер, тем более резко выраженный, чем больше отношение J/J_A .

Траектории частиц в таком пучке проходят, вообще говоря, и в осевой его части, но продольная составляющая скорости там мала, так что трубчатое распределение плотности тока не противоречит относительно равномерному (а в случае полной нейтрализации — просто равномерному) распределению плотности заряда. В данной работе мы хотели бы обратить внимание на возможность существования истинно трубчатого распределения, в котором и плотность заряда и плотность тока равны нулю при расстояниях от оси $r < r_1$, где r_1 — внутренний радиус пучка. Такой характер распределения для ряда приложений представляет большой интерес.

В рассматриваемой модели движение частиц происходит между двумя цилиндрами радиуса r_1 и $r_2 > r_1$ по траекториям, имеющим спиралевидный характер. Колебания радиальной координаты электронов от r_1 до r_2 происходят под действием самосогласованного электрического и магнитного поля пучка и поля неподвижных ио-

нов. Внешняя фокусировка предполагается отсутствующей. Кинетическая энергия частиц пучка, естественно, минимальна при $r = r_1$, т.е. там, где электростатический потенциал максимален, и максимальна на внешнем радиусе r_2 .

Как и в работе /1/, мы полагаем, что функция распределения электронов не зависит от обобщенного момента количества движения. От двух других интегралов движения – гамильтониана H и продольной составляющей обобщенного импульса P_z функция распределения зависит следующим образом:

$$f = (n_0 c^2 / 2\pi) \delta(H - H_0) \delta(P_z - P_0), \quad (1)$$

где n_0 – плотность электронов на том радиусе, где электростатический потенциал φ равен нулю (в качестве такого радиуса ниже выбирается $r = r_1$). Величина H_0 имеет смысл полной энергии частиц, а P_0 – продольного импульса на внутреннем радиусе, где азимутальная составляющая вектор-потенциала A также равна нулю. Поскольку $H = c \left[m_0^2 c^2 + P_1^2 + (P_z + \frac{e}{c} A)^2 \right]^{1/2} - e\varphi$, то интегрирование по азимутальному углу и импульсам дает следующую зависимость плотности заряда электронов и плотности продольного тока J от потенциалов φ и A :

$$\rho = en_0 (1 + e\varphi/H_0); \quad (2)$$

$$J = \frac{en_0 c^2 P_0}{H_0} (1 + eA/P_0 c) = en_0 \beta_0 c (1 + eA/P_0 c);$$

причем $e\beta_0 = P_0 c^2 H_0^{-1}$ имеет, очевидно, смысл продольной скорости частиц на радиусе $r = r_1$.

Подстановка выражений (2) в уравнения Максвелла не нарушает их линейности, что позволяет легко получить аналитическое решение. Внутри пучка ($r < r_1$) потенциалы φ и A равны нулю, вне пучка ($r > r_2$) спадают логарифмически, а в объеме, занятом частицами,

ведут себя следующим образом:

$$\varphi/H_0 = -1 + M(z_1; z); \quad \rho = \varphi_0 M(z_1; z); \quad (3)$$

$$eA/P_0 c = -1 + M(z_1^*; z^*); \quad j = \varphi_0 \beta_0 c M(z_1^*; z^*); \quad (4)$$

где

$$z = r \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0 (1-f)}{H_0}}, \quad z^* = r \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{H_0}}, \quad (5)$$

$$M(z_1; z) = z_1 [K_1(z_1) I_0(z) + I_1(z_1) K_0(z)];$$

а f есть коэффициент нейтрализации, т.е. отношение плотности ионов к плотности электронов. В выражении (5) коэффициенты при модифицированных функциях Бесселя $I_0(z)$ и $K_0(z)$ получены из условия равенства нулю потенциалов и полей на внутреннем радиусе $r = r_1$.

Условия того, что на граничных радиусах пучка поперечный импульс частиц равен нулю, т.е. $(H_0 + \varphi)^2(x_2) = \gamma_0^2 c^4 + c^2(P_0 + \frac{e}{c} A(r_2))^2$, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ($\gamma_0 n_0 c^2$ - энергия частиц на внутреннем радиусе пучка), дают связь величин z_1 , z_2 и γ_0 , имеющую следующий вид:

$$\gamma_0^2 = [M^2(z_1; z_2) - 1] / [M^2(z_1; z_2) - M^2(z_1; z_2)]. \quad (6)$$

Видно, что γ_0 всегда остается больше единицы. С другой стороны, из (3,4) следует, что величины z_1 и z_2 связаны с максимальной (входной) энергией частиц пучка $\gamma_{\max} n_0 c^2$, достигаемой при $r = r_2$

$$\gamma_{\max} = \gamma_0 M(z_1; z_2) \quad (7)$$

и с полным током J , переносимым пучком

$$\begin{aligned} \frac{J}{J_A} &= \frac{z_1^* z_2^*}{2M(z_1^*; z_2^*)} [K_1(z_1^*) I_1(z_2^*) - I_1(z_1^*) K_1(z_2^*)] = \\ &= \frac{z_2^*}{2M(z_1^*; z_2^*)} \frac{\partial}{\partial z_2^*} M(z_1^*; z_2^*); \end{aligned} \quad (8)$$

$$J_A = \frac{n_0 c^3}{e} \sqrt{\gamma_{\max}^2 - 1} = 17 \text{кА} \sqrt{\gamma_{\max}^2 - 1}. \quad (8)$$

Зависимости γ_0 , γ_{\max} и J/J_A от z_1^2 и z_2^2 изображены на рис. 1, 2.

Таким образом, задание трех физических параметров — полного тока J , максимальной энергии электронов γ_{\max} и коэффициента нейтрализации f определяет по соотношениям (6)–(8) величины γ_0 , z_1 и z_2 . Абсолютная величина радиусов пучка r_1 и r_2 остается свободным параметром, через который определяются, естественно, и абсолютные значения плотности заряда и плотности тока. Коэффициент нейтрализации f для данной модели пучка может лежать в пределах $\gamma_{\max}^{-2} < f < \gamma_0^{-2}$; таким образом, кулоновская расталкивающая сила недокомпенсирована на внутреннем и перекомпенсирована на внешнем радиусе пучка.

Нетрудно видеть, что случай $z_2^2 \ll 1$ соответствует малым значениям полного тока, так как в этом предельном случае

$$M(z_1^2; z_2^2) \rightarrow 1 + \frac{1}{2} z_1^2 \left(\ln \frac{z_1^2}{z_2^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} z_2^2; \quad (9)$$

$$\frac{J}{J_A} \rightarrow \frac{1}{2} (z_2^2 - z_1^2); \quad z_1^2 < z_2^2 \ll 1.$$

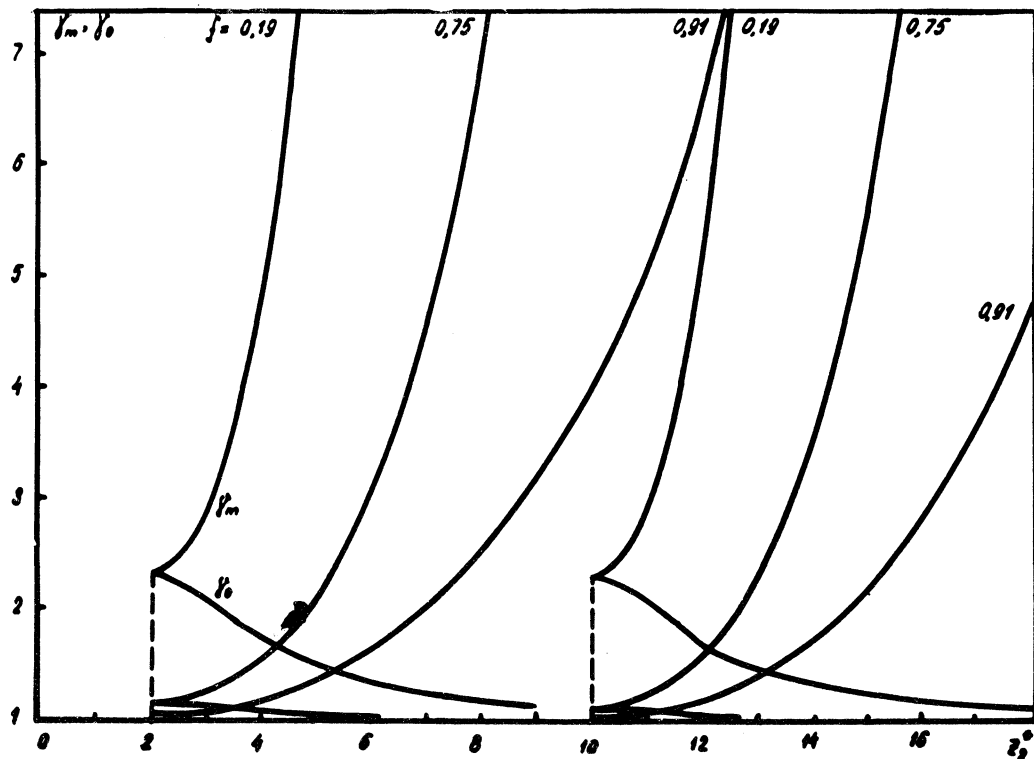
Естественно поэтому рассмотреть обратный случай $z_1^2 \gg 1$, который, как можно ожидать, соответствует большим плотностям тока (при конечном r $n_0 \rightarrow \infty$). Асимптотика функций M при $z_2^2 > z_1^2 \rightarrow \infty$ имеет вид

$$M(z_1^2; z_2^2) \approx \sqrt{z_1^2/z_2^2} \operatorname{ch}(z_2^2 - z_1^2), \quad (10)$$

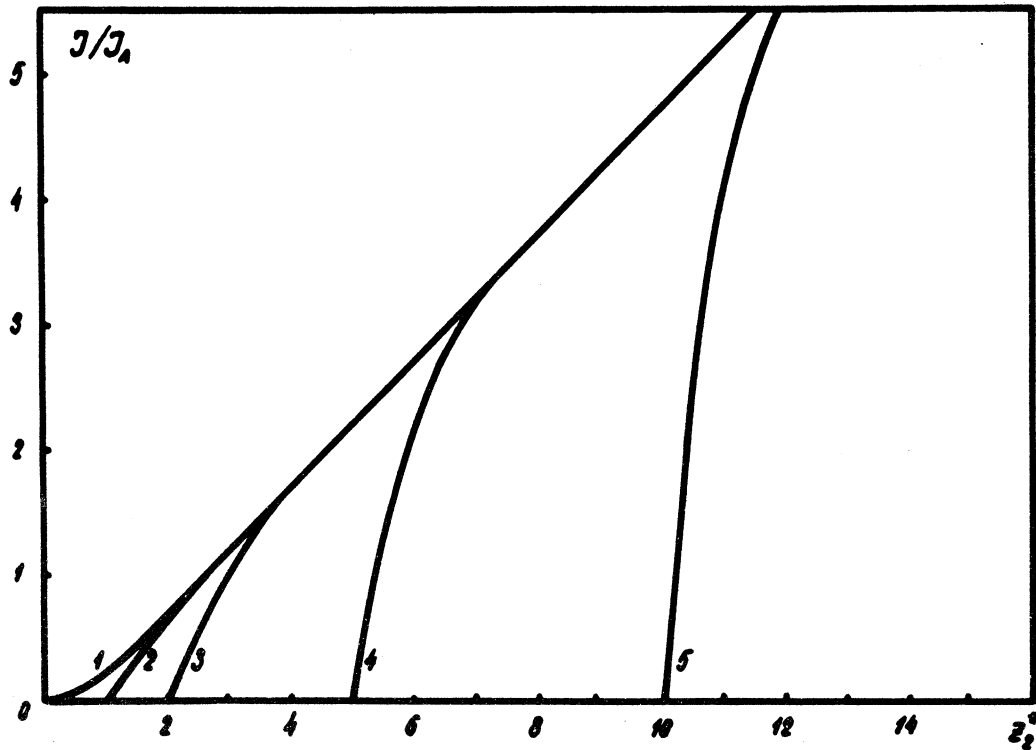
так что из (8) получаем

$$\frac{J}{J_A} = \frac{1}{2} z_2^2 \cdot \operatorname{th}(z_2^2 - z_1^2). \quad (11)$$

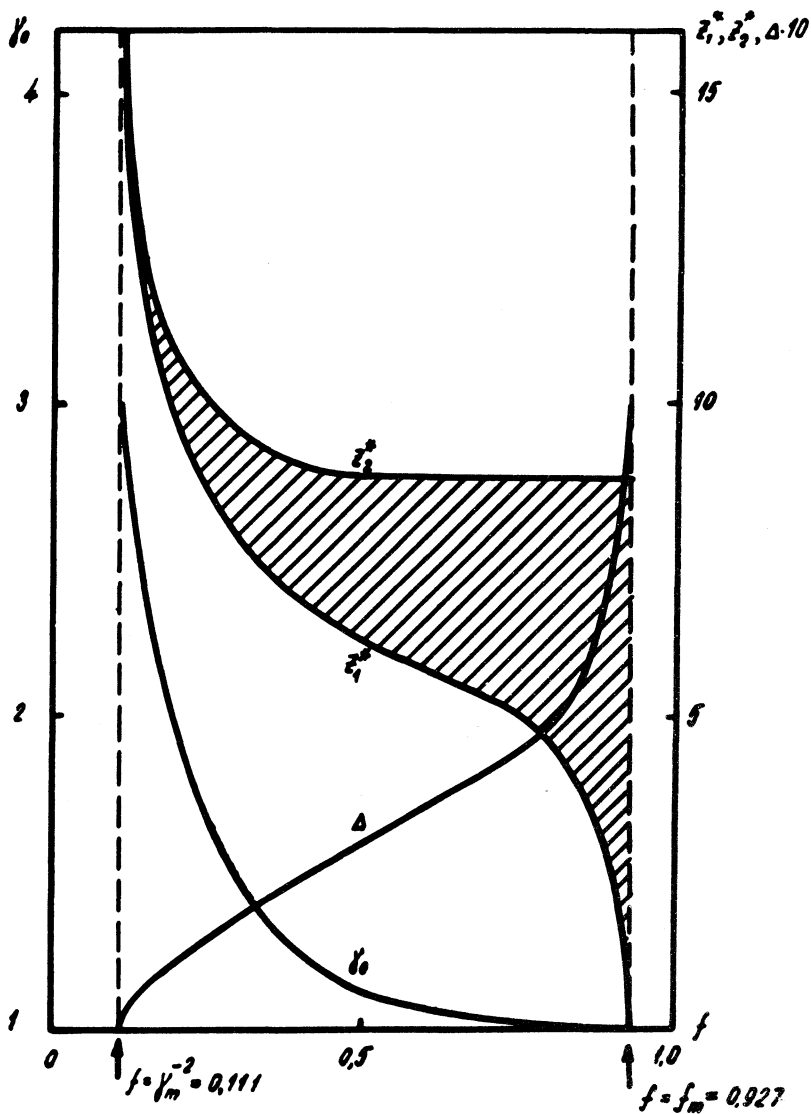
Таким образом, при фиксированной величине z_2^2 полный ток возрастает с увеличением толщины токового слоя



Р и с. 1. Максимальная (γ_m) и минимальная (γ_0) энергия электронов в пучке в зависимости от параметров z_1^0, z_2^0 при различных коэффициентах нейтрализации f .
 Кривые начинаются при $z_2^0 = z_1^0$.



Р и с. 2. Полный ток пучка J в единицах предельного тока Альфвена J_A в зависимости от параметра z_2^0 : 1 - $z_1^0 = 0$; 2 - $z_1^0 = 1$; 3 - $z_1^0 = 2$; 4 - $z_1^0 = 5$; 5 - $z_1^0 = 10$.



Р и с. 3. Параметры пучка с $\gamma_{\max} = 3$, $J = 200$ кА в зависимости от коэффициента нейтрализации f .

лишь до $z_2^* - z_1^* \geq 1$, а затем наступает насыщение. При этом же значении толщины слоя начинает резко возрастать поперечное провисание электростатического потенциала, которое характеризуется величиной γ_0 . На рис. 3 представлен пример зависимости γ_0 , z_2^* и относительной "трубчатости" пучка $\Delta = (z_2^* - z_1^*)/z_2^*$ от коэффициента нейтрализации f при фиксированных значениях γ_{\max} и J/J_A . Видно, что в рассматриваемой модели "трубчатость" пучка выражена тем сильнее, чем ближе коэффициент нейтрализации к величине γ_{\max}^{-2} . При сильной "трубчатости" пучок может переносить большой ток при сравнительно небольшом перепаде потенциала по радиусу. Например, с помощью рис. 1, 2 получим, что пучок с параметрами $z_1^* = 10$, $z_2^* = 11$, $\gamma_{\max} = 3,0$ при $f = 0,19$ переносит ток $J \approx 200$ ка, при этом $\gamma_0 \approx 2$. Сплошной пучок при том же значении f переносит ток ~ 20 ка. При увеличении f , согласно рис. 3, "трубчатость" уменьшается; при $f = f_{\max}$ внутренний радиус пучка становится равным нулю, и мы приходим к частному случаю модели, рассмотренной в /1/.

В рассмотренной модели трубчатого пучка, в отличие от /1/, не реализуется случай полной нейтрализации ($f = 1$), когда поперечное электростатическое провисание потенциала вообще отсутствует. При неполной нейтрализации эта модель электростатически более выгодна, т.е. дает меньшее поперечное провисание потенциала при том же токе, или допускает больший ток при том же перепаде энергии $\gamma_{\max} - \gamma_0$.

Поступила в редакцию
3 марта 1971 г.

Л и т е р а т у р а

1. D. A. Hammer, N. Rostoker. Phys. of Fluids, 13, 1831 (1970).