Краткие сообщения по физике № 7 июль 1971

ФОККЕР-ПЛАНКОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ НЕКОГЕРЕНТНОГО СВЕТА

Ю. Е. Дьяков

1. Как показывают оценки /1/, использование некогерентной накачки для наблюдения вынужденного рассеяния света должно мало сказаться на величине коэффициента усиления. Этот результат получен, по-существу, в предположении, что полоса накачки $\Delta\nu_L$ настолько мала, что допустимо пренебречь дисперсией скоростей взаимодействующих волн (при этом $\Delta\nu_L$ может значительно превосходить ширину спонтанной линии $\Delta\nu_o$). Приближенный учет дисперсии показал /1/, что режим рассеяния близок к когерентному, если

$$\Delta\nu_L \ll gI_L/2\pi|\nu'|,$$

где g (см/Мвт) – коэффициент усиления при монохроматической накачке, I_L (Мвт/см^2) – интенсивность накачки, $\nu' = \delta u/u$ – относительная дисперсия групповых скоростей (при рассеянии назад $\nu' = 2$). Таким образом, рассмотренный в работе /1/ случай реализуется при условии, что спектральная плотность накачки S_L достаточно велика:

$$S_L = I_L/\Delta\nu_L \gg S_L' = 2\pi|\nu'|/g. \qquad (1)$$

Например, в CS_2 для ВКР-вперед ($g = 0.012$, $|\nu'| = 0{,}025$) $S_L' = 13$ Мвт/см, а для ВРМБ ($g = 0{,}15$, $\nu' = 2$) $S_L' = 84$ Мвт/см.

2. В настоящем сообщении развит метод, позволя-

ющий обобщить теорию вынужденного рассеяния на область $S_L < S_L^!$; при $S_L \approx S_L^!$ приведенные ниже результаты согласуются с полученными в /1/. Мы предполагаем при этом, что длина области рассеяния велика по сравнению с когерентной,

$$z \gg l_{\text{ког}},$$

где $l_{\text{ког}} = (\pi|\nu''|\Delta\nu_L)^{-1}$ /2/, иными словами, линия накачки считается достаточно широкой*). Метод состоит в том, что комплексная амплитуда накачки в укороченных уравнениях представлена как δ-коррелированный случайный процесс

$$\langle A_L(\theta)A_L^*(\theta')\rangle = \frac{S_L}{c}\delta(\theta - \theta'), \tag{2}$$

(везде имеется в виду анализ в приближении заданного поля накачки), и обоснован переход к уравнениям для средних моментов комплексных амплитуд взаимодействующих волн. Уравнения для средних являются линейными с постоянными коэффициентами, зависящими от спектральной плотности накачки S_L, и их интегрирование не представляет принципиальных трудностей. Таким путем могут быть определены не только средние амплитуды волн, но и их интенсивности, корреляционные функции, спектры и моменты более высокого порядка.

3. Чтобы пояснить методику перехода к уравнениям для средних, рассмотрим систему двух уравнений стандартного вида для комплексных амплитуд A_1 и A_2

$$\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} + \delta_1 A_1 = \gamma_1 A_L(t + \nu_3 z)A_2, \tag{3а}$$

$$\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} + \delta_2 A_2 = \gamma_2 A_L^*(t + \nu_3 z)A_1, \tag{3б}$$

---

*) Если спектр накачки размыт только за счет быстрых флуктуаций ее частоты, то расcмотрение может быть проведено для произвольной величины $\Delta\nu_L$.

считая β_i и ν_i вещественными, а δ_i и γ_i – комплексными постоянными. Усредняя в (3а), получим

$$\beta_1 \frac{\partial \langle A_1 \rangle}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \langle A_1 \rangle}{\partial t} + \delta_1 \langle A_1 \rangle = \gamma_1 \langle A_L(t + \nu_3 z) A_2 \rangle. \quad (4)$$

Для вычисления величины $\langle A_L(t + \nu_3 z) A_2 \rangle$ можно воспользоваться следующим приемом /3/. Переписав (3б) в виде

$$\frac{\partial A_2}{\partial \zeta} + \frac{\delta_2}{\beta_2} A_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_2} A_L(\vartheta + \nu_{13}\zeta) A_1,$$

$$\left(\vartheta = t - \frac{\nu_2}{\beta_2} z, \ \ \zeta = z, \ \nu_{13} = \frac{\nu_1}{\beta_1} + \nu_3\right),$$

проинтегрируем его в малом интервале $(\zeta - \varepsilon, \zeta)$. Предполагая достаточную медленность изменения A_1 и A_2, получим

$$A_2(\zeta) = A_2(\zeta - \varepsilon) - \frac{\delta_2}{\beta_2} \varepsilon A_2 + \frac{\gamma_2}{\beta_2} A_1(\zeta - \varepsilon) \int_0^{\varepsilon} A_L(t + \nu_3 z -$$

$$- \nu_{23} z') dz', \quad \left(\nu_{23} = \frac{\nu_2}{\beta_1} + \nu_3\right),$$

где $A_1(\zeta - \varepsilon)$ и $A_2(\zeta - \varepsilon)$ с $A_L(t + \nu_3 z - \nu_{23} z')$ не коррелируют. Подставив последнее выражение в правую часть (4), устремляя ε к нулю и учитывая (2), получим уравнение для средней амплитуды первой волны в виде

$$\beta_1 \frac{\partial \langle A_1 \rangle}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \langle A_1 \rangle}{\partial t} + \left(\delta_1 - \frac{S_L \gamma_1 \gamma_2}{2 \beta_2 \nu'_{23}}\right) \langle A_1 \rangle = 0. \quad (5а)$$

Аналогично находится и уравнение для A_2

$$\beta_2 \frac{\partial\langle A_2\rangle}{\partial z} + \nu_2 \frac{\partial\langle A_2\rangle}{\partial t} + \left(\delta_2 - \frac{S_L\gamma_1\gamma_2}{2\beta_1\nu'_{13}}\right)\langle A_2\rangle = 0, \qquad (5б)$$

а также уравнения для интенсивностей $I_i = \langle A_i A_i^*\rangle$

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 \frac{\partial I_1}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + \left(\delta_1 + \delta_1^* - \frac{S_L \mathrm{Re}\,\gamma_1\gamma_2}{\beta_2\nu'_{23}}\right) I_1 = \frac{S_L|\gamma_1^2|}{\beta_1|\nu'_{13}|} I_2,\\
\beta_2 \frac{\partial I_2}{\partial z} + \nu_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + \left(\delta_2 + \delta_2^* - \frac{S_L \mathrm{Re}\,\gamma_1\gamma_2}{\beta_1\nu'_{13}}\right) I_2 = \frac{S_L|\gamma_2^2|}{\beta_2\nu'_{23}} I_1,
\end{aligned}\right\} (6)$$

$$(\nu'_{i3} = c\nu_{i3}),$$

которые следует далее решать с учетом граничных и начальных условий. Если интересоваться лишь стационарным режимом, то временные производные в уравнениях (5-6) можно опустить. Следует отметить, что полученные уравнения справедливы также в случае, когда параметры γ_i, δ_i или S_L являются функциями времени или координаты.

4. Уравнения для средних могут быть получены и более формальным путем. Полагая в (3) $\theta = t + \nu_3 z$, $\zeta = z$ и написав A_1 и A_2 в виде пространственных интегралов Фурье

$$A_{1,2}(\theta,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{1,2}(\theta,k)\exp(-ik\zeta)dk,$$

получим для $x_{1,2}$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами ($\dot{x} = dx/d\theta$)

$$\dot{x}_1 = \mathcal{H}_{11}x_1 + \mathcal{H}_{12}x_2 + \mathcal{H}_{10}, \qquad (7а)$$

$$\dot{x}_2 = \mathcal{H}_{21}x_1 + \mathcal{H}_{22}x_2 + \mathcal{H}_{20}, \qquad (7б)$$

где

$$\mathcal{H}_{11} = (ik - \delta_1/\beta_1)/\nu_{13}, \qquad \mathcal{H}_{22} = (ik - \delta_2/\beta_2)/\nu_{23},$$

$$\mathscr{H}_{12} = (\gamma_1 A_L(\theta))/\beta_1\nu_{13}, \qquad \mathscr{H}_{21} = (\gamma_2 A_L^{*}(\theta))/\beta_2\nu_{23},$$

а свободные члены $\mathscr{H}_{10}$ и $\mathscr{H}_{20}$ учитывают граничные условия: если $A_i(z = 0) = A_{io}$, то $\mathscr{H}_{io} = A_{io}(2\pi\beta_i\nu_{i3})^{-1}$ (включение граничных условий непосредственно в уравнения для определяемых величин является здесь удобным). Чтобы определить интенсивности, положим далее

$$A^{*}_{1,2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_{3,4}\exp(-ik'\zeta)dk', \quad x_5 = x_1x_3, \quad x_6 = x_2x_3,$$

$$x_7 = x_1x_4, \quad x_8 = x_2x_4. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что величины $x_n (n = 1,\ldots,8)$ удовлетворяют замкнутой системе линейных уравнений вида

$$\dot{x}_n = \sum_{p=1}^{N} \mathscr{H}_{np}x_p + \mathscr{H}_{no}, \qquad (N = 8).$$

Если флуктуационные компоненты коэффициентов $\mathscr{H}_{np}$ δ--коррелированы,

$$\langle\tilde{\mathscr{H}}_{mn}(\theta)\tilde{\mathscr{H}}_{pq}(\theta')\rangle = S_{mnpq}\delta(\theta - \theta'),$$

то при любом N величины x_n образуют N-мерный марковский процесс, а их распределение вероятностей удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n} A_n W + \frac{1}{2} \sum_{q,p=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} B_{pq}W \tag{9}$$

с коэффициентами интенсивности A_n, равными /3/

$$A_n = H_{no} + \sum_{p=1}^{N} H_{np}x_p,$$

где

$$H_{no} = \langle\mathscr{H}_{no}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} S_{nppo}, \quad H_{np} = \langle\mathscr{H}_{np}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{N} S_{nqqp}$$

(коэффициенты B_{pq} для дальнейшего несущественны). Искомые уравнения для моментов $m_n = \langle x_n \rangle$ следуют непосредственно из уравнения Фоккера-Планка /4-6/: умножая (9) на x_n и интегрируя по всем x, найдем

$$\dot{m}_n = \sum_{p=1}^{N} H_{np} m_p + H_{no}, \qquad (n = 1,\ldots,N). \tag{10}$$

Для системы (7), например,

$$\dot{m}_1 = H_{11} m_1 + H_{10}, \tag{11}$$

где

$$H_{11} = \frac{ik - \delta_1/\beta_1}{\nu_{13}} + \frac{\gamma_1\gamma_2 S_L}{c\beta_1\beta_2\nu_{13}\nu_{23}}, \quad H_{10} = \frac{A_{10}}{2\pi\beta_1\nu_{13}}, \tag{12}$$

или, после умножения на $\exp(-ik\zeta)$ и интегрирования по k,

$$\beta_1\nu_{13}\frac{\partial\langle A_1\rangle}{\partial\theta} + \beta_1\frac{\partial\langle A_1\rangle}{\partial\zeta} + \left(\delta_1 - \frac{S_L\gamma_1\gamma_2}{2\beta_2\nu_{23}^{!}}\right)\langle A_1\rangle = A_{10}\delta(\zeta).$$

Перейдя к прежним переменным t и z, нетрудно убедиться, что последнее уравнение совпадает с (5а) (и учитывает, кроме того, граничное условие в сечении $z = 0$). Аналогично могут быть выведены и уравнения (5) для интенсивности волн.

5. Для определения корреляционной функции $\langle A_1^* A_1^\tau \rangle$ заменим в (7) θ на $\theta + \tau$ (это обозначается верхним индексом τ) и будем считать τ независимой переменной, а θ - параметром. Умножая обе части уравнений на независящую от τ величину x_3 (см. (8)), получим для $y_1 = x_3 x_1^\tau$ и $y_2 = x_3 x_2^\tau$ систему уравнений того же вида, что и (7):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial\tau} &= \mathcal{H}_{11}^\tau y_1 + \mathcal{H}_{12}^\tau y_2 + \mathcal{H}_{10}^\tau x_3,\\ \frac{\partial y_2}{\partial\tau} &= \mathcal{H}_{21}^\tau y_1 + \mathcal{H}_{22}^\tau y_2 + \mathcal{H}_{20}^\tau x_3,\end{aligned}\right\}$$

поэтому, согласно (11),

$$\frac{\partial \langle y_1 \rangle}{\partial \tau} = H_{11} \langle y_1 \rangle + H_{10} m_3, \tag{13}$$

где коэффициенты H_{11} и H_{10} даны выражениями (12). Учитывая "начальное" по τ условие $\langle y_1 \rangle_{\tau=0} = m_5$ (это соответствует условию $\langle A_1^* A_1^\tau \rangle_{\tau=0} = I_1$), получим из (13)

$$\langle y_1 \rangle = (m_5 - m_1 m_3)\exp(H_{11}\tau) + m_1 m_3,$$

откуда следует представление корреляционной функции в виде интеграла

$$K_1(\tau) = \langle A_1^* A_1^\tau \rangle - \langle A_1 \rangle \langle A_1^* \rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dk dk' (m_5 - m_1 m_3) \exp\Big[H_{11}\tau - - i(k + k')z\Big].$$

В стационарном режиме ($\dot{m}_n = 0$) величины m_5, m_1 и m_3, входящие в (14), являются постоянными, определенными системой алгебраических уравнений (10).

6. В заключение в качестве примера рассмотрим усиление гармонического стоксового сигнала в поле широкополосной шумовой накачки при ВРМБ. В этом случае

$$\beta_1 = 1, \; \beta_2 = 0, \; \nu_1 = \nu_3 = c^{-1}, \; \nu_2 = v^{-1}, \; \mathrm{Jm}\,\delta_i = \mathrm{Jm}\,\gamma_i = 0,$$

$$\nu'_{13} = 2, \; \nu'_{23} = \infty, \; 2\gamma_1\gamma_2\delta_2^{-1} = g, \; \beta_2\nu'_{23} = c/v, \; \Delta\nu_0 = v\delta_2/\pi c;$$

$A_1 = A_s$ и $A_2 = A_p$ – амплитуды стоксовой компоненты ВРМБ и гиперзвука, соответственно. Среднее значение амплитуды усиленного сигнала определится из уравнения (5а) как

$$\langle A_s \rangle = A_{so}\exp(-\delta_1 z + \Gamma_1 z),$$

причем ее инкремент равен

$$\Gamma_1 = \gamma_1\gamma_2 S_L v/2c = (\pi/4) g S_L \Delta\nu_o = (\pi/4) g I_L \Delta\nu_o/\Delta\nu_L.$$

Решение уравнений (6) для интенсивностей приводит к следующему результату:

$$I_s(z) = I_{so}\exp(-2\delta_1 z + \Gamma_2 z), \quad \Gamma_2 = \frac{\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\nu_o}{\Delta\nu_L}}{1 - S_L g/8} g I_L.$$

Как показывает последнее выражение, инкремент Γ_2 при $S_L \ll S_L'' = 8/g$ существенно(в $\Delta\nu_L/\Delta\nu_o \gg 1$ раз) меньше инкремента при когерентной накачке $\Gamma_{\text{ког}} = gI_L$. При $S_L \to S_L''$ величина Γ_2 резко возрастает. Заметим, что $S_L'' \approx S_L'$ (см. (1)). Анализ спектральных характеристик стоксовой волны, здесь для краткости опущенный, показывает, что развитая теория справедлива в интервале

$$0 \leqslant S_L/S_L'' \leqslant 1 - \Delta\nu_o/\Delta\nu_L,$$

т.е. $\Gamma_{2(\max)} \approx \Gamma_{\text{ког}}$, в соответствии с полученными в /1/ результатами.

Автор благодарит С. А. Ахманова и Ф. В. Бункина за обсуждение работы.

Поступила в редакцию
7 мая 1971 г.

Литература

1. Ю. Е. Дьяков. Письма в ЖЭТФ, 11, 362 (1970).
2. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин. Изв. ВУЗ (радиофизика), 13, 787 (1970).
3. Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. "Сов.радио", 1961 г.
4. М. А. Леонтович. Статистическая физика. М.–Л.,1944г.
5. T. K. Caughey, J. K. Dienes. J. Math. Phys., 41, 300, 1962.

6. J. L. Bogdanoff, F. Kozin. J. Acoust. Soc. Amer., 34, 1063, (1962).