

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТУПЕНЧАТОЙ АППРОКСИМАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СЕКТОРНЫХ ЦИКЛОТРОНОВ

В. Н. Канунников

1. В теории секторных циклотронов нередко применяют "ступенчатую" аппроксимацию магнитного поля, впервые использовавшуюся уже в первых работах /1,2/. При этой аппроксимации поле считают однородным по азимуту как в магнитных секторах, так и в промежутках, а отношение этих полей характеризуют безразмерным параметром \mathcal{E} ($0 < \mathcal{E} < 1$), вообще говоря, зависящим от радиуса. Такое приближение позволяет найти аналитически как форму орбиты, так и частоты бетатронных колебаний; в ряде случаев оно существенно упрощает и численные расчеты, например, при исследовании влияния большого числа проходов ионов через ускоряющую систему /3/. Для циклотронов с раздельно-секторной магнитной системой используют и более грубую аппроксимацию, полагая $\mathcal{E} \equiv 0$ (поле в промежутках отсутствует; например, /4/).

Другой распространенной аппроксимацией поля секторных циклотронов является "гладкое" приближение. Азимутальную зависимость поля представляют в виде ряда Фурье, причем часто учитывают только постоянную составляющую $f_0 = \langle N \rangle / N_{\max}$ ($\langle N \rangle$ - среднее по азимуту поле) и основную гармонику f_N . В качестве другой величины, характеризующей глубину модуляции, используют флаттер F (полусумму квадратов всех гармоник), который известным способом выражается через $\langle N \rangle$ и средний квадрат поля $\langle N^2 \rangle$

$$r = \langle n^2 \rangle \cdot \langle n \rangle^{-2} - 1. \quad (1)$$

Указанные два приближения для поля имеют свои преимущества и недостатки, полный анализ и сравнение которых не входит в нашу задачу. Отметим лишь, что разложение Фурье удобно при обработке данных измерений и широко применяется при моделировании и формировании поля. Ступенчатая аппроксимация используется главным образом при предварительных расчетах магнитных систем, при этом вопрос о связи параметров этой аппроксимации (например, величины \mathcal{E}) с реальными характеристиками магнита, насколько известно, до сих пор не ставился. Правда, в недавней работе /5/ сделана попытка определить параметры эквивалентного ступенчатого поля по данным магнитных измерений.

2. Параметры ступенчатой аппроксимации можно найти расчетным путем, если известны характеристики гладкого приближения или геометрические размеры магнитной системы циклотрона. Чтобы получить аналитические зависимости, связывающие параметры идеализированной аппроксимации поля с реальными геометрическими размерами системы, мы будем исходить из допущений, сделанных в работе /6/ (бесконечная проницаемость железа, плоское приближение, удаленность токов от рабочей области и др.), и полученных там результатов. Как и в работе /6/, здесь рассматриваются два случая: 1) циклотрон с секторными накладками на силовых полюсах; 2) циклотрон с раздельно-секторной магнитной системой.

Получим прежде всего связь параметров гладкого приближения с параметрами ступенчатого поля. Для этого в дополнение к величине \mathcal{E} , определяющей поле в промежутке, введем второй параметр — безразмерную ширину p эквивалентного промежутка (в долях периода магнитной системы)

$$p = 2\theta_z / N, \quad 0 < p < 1, \quad (2)$$

где N - число секторов, а $\theta_{\mathcal{E}}$ - угловая ширина эквивалентного промежутка.

Пользуясь определением среднего поля f_0 и флаттера F (1), нетрудно получить формулы для перевода характеристик одного и того же магнитного поля на "язык" любого из двух приближений

$$f_0 = 1 - p(1 - \mathcal{E}), \quad (3)$$

$$F = \frac{p(1 - p)(1 - \mathcal{E})^2}{[1 - p(1 - \mathcal{E})]^2}, \quad (4)$$

и наоборот

$$\mathcal{E} = \frac{f_0 - f_0^2(F + 1)}{1 - f_0}, \quad (5)$$

$$p = \frac{(1 - f_0)^2}{1 - 2f_0 + f_0^2(F + 1)}. \quad (6)$$

Зависимости (3) и (4) для частного случая $p = 0,5$ построены на рис. 1.

Последние два выражения мы используем ниже, чтобы получить искомые зависимости параметров \mathcal{E} и p от геометрии магнитной системы.

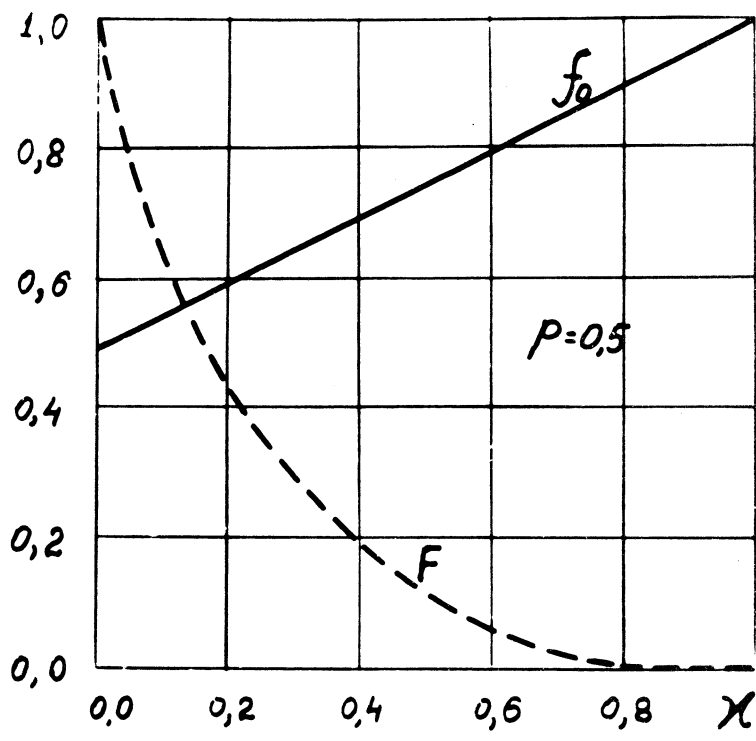
3. Для циклотрона с секторными выступами на сплошных полюсах имеем (ср. выражения (5) и (6) работы /6/)

$$f_0 = \mu + (1 - \mu)(1 - \Pi) + \frac{Nh}{\pi^2 R} A(\mu), \quad (7)$$

$$f_0^2(F + 1) = \mu^2 + (1 - \mu^2)(1 - \Pi) + \frac{Nh}{\pi^2 R} B(\mu), \quad (8)$$

где

$$A(\mu) = \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu} + 2 \ln \frac{1 - \mu^2}{4\mu}, \quad (9)$$



Р и с. 1. Связь параметров гладкого приближения и ступенчатой аппроксимации поля.

$$B(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)(1 - \mu)}{\mu} \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu}, \quad (10)$$

$\mu = h/N$, h - малый вертикальный зазор (между секторными выступами), N - большой вертикальный зазор, R - радиус, а Π - безразмерное азимутальное расстояние между секторными выступами, определяемое аналогично параметру p :

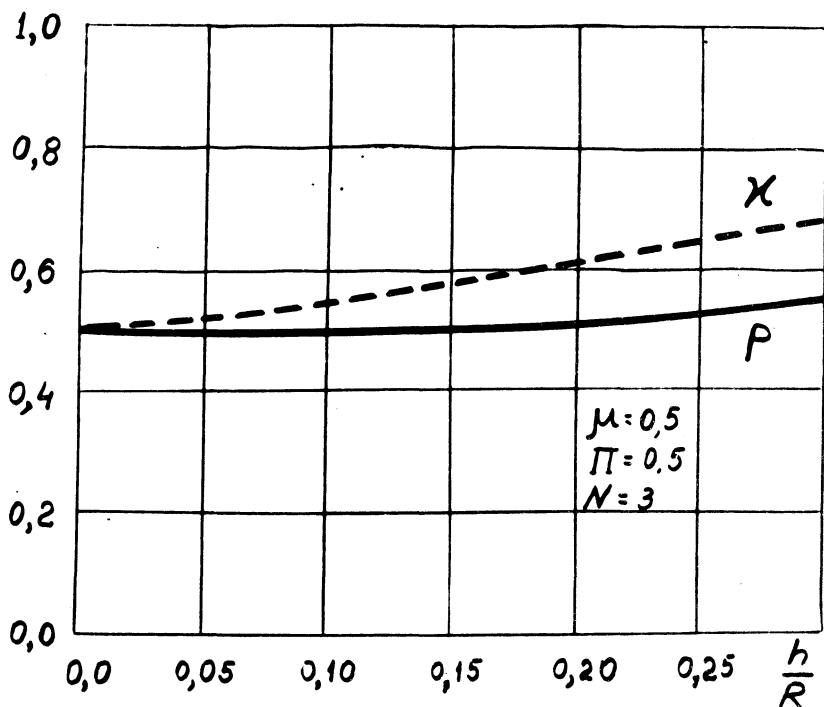
$$\Pi = 2\pi\theta_{\Pi}/N, \quad 0 < \Pi < 1. \quad (11)$$

Подставив (7) и (8) сначала в (5), а затем в (6), получим

$$x = \frac{\mu + \frac{N}{\pi^2} \frac{[A(\mu) - B(\mu)] h}{(1 - \mu)\Pi} \cdot \frac{h}{R}}{1 - \frac{N}{\pi^2} \frac{A(\mu)}{(1 - \mu)\Pi} \cdot \frac{h}{R}}, \quad (12)$$

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{\left[1 - \frac{N}{\pi^2} \frac{A(\mu)}{(1 - \mu)\Pi} \cdot \frac{h}{R}\right]^2}{1 - \frac{N}{\pi^2} \frac{[2A(\mu) - B(\mu)] h}{(1 - \mu)^2 \Pi} \cdot \frac{h}{R}}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) видно, что при $h/R \ll 1$, т.е. когда зазор мал или радиус велик, $x \approx \mu = h/N$, а $p \approx \Pi$, т.е. параметры ступенчатой аппроксимации совпадают с соответствующими геометрическими характеристиками магнита. Вблизи центра, при $h/R \sim 1$, исходные выражения (7) и (8) неприменимы, так как получены из двумерного представления поля; с другой стороны, центральная область секторного циклотрона имеет обычно свою особую геометрию. Точную границу применимости полученных выражений со стороны больших h/R можно определить путем сравнения расчетов с экспериментальными данными. На рис. 2 приведены полученные по формулам (12) и (13) зависимости для частного случая $N = 3$, $\Pi = 0,5$, $\mu = 0,5$.



Р и с. 2. Зависимость параметров ступенчатой аппроксимации поля от геометрических параметров магнита с секторными накладками на сплошных полюсах.

4. Магнитная система для изохронного циклотрона, состоящая из секторов, отделенных друг от друга свободными азимутальными промежутками, привлекательна не только рядом технических преимуществ (например, удобство размещения ускоряющей и выводной систем), но также и в связи с возможностью улучшения характеристик пучка (усиление фокусировки, получение "разделенных" орбит при эффективном использовании железа и др.). С ростом максимальной энергии ионов ($\geq 100 - 150$ Мэв по протонам) применение такой системы становится, по-видимому, неизбежным из-за трудностей получения необходимой глубины модуляции в магнитах со сплошными полюсами.

Для раздельно-секторной системы (см. формулы (9) и (10) работы /6/):

$$f_0 \approx 1 + \frac{\mu}{\pi} \Pi \ln \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} - \frac{2}{\pi} \text{Parctg} \frac{1}{\mu}, \quad (14)$$

$$f_0^2 (F + 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Parctg} \frac{1}{\mu}. \quad (15)$$

Здесь (в отличие от предыдущего) $\mu = h/R\theta_n$, а остальные обозначения аналогичны: h - вертикальный зазор, R - радиус, $\Pi = 2\theta_n/N$, θ_n - азимутальная ширина промежутка между секторами, N - число секторов.

Подстановка (14) и (15) в (5) и (6) дает

$$\alpha = \frac{M(\mu)}{1 - M(\mu)}, \quad (16)$$

где

$$M(\mu) = \frac{\mu \ln \frac{1 + \mu^2}{\mu^2}}{2 \arctg \frac{1}{\mu}}, \quad (17)$$

$$\frac{p}{\Pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{[1 - M(\mu)]^2}{1 - 2M(\mu)} \cdot \arctg \frac{1}{\mu}. \quad (18)$$

Зависимости α и r/Π от μ построены на рис. 3. В магнитной системе циклотрона с разделенными секторами центральная часть отсутствует (используется внешняя инжекция) и $\mu \lesssim 0,3$. При этом эквивалентная ширина промежутка r отличается от геометрической менее, чем на 5% (см. рис. 3).

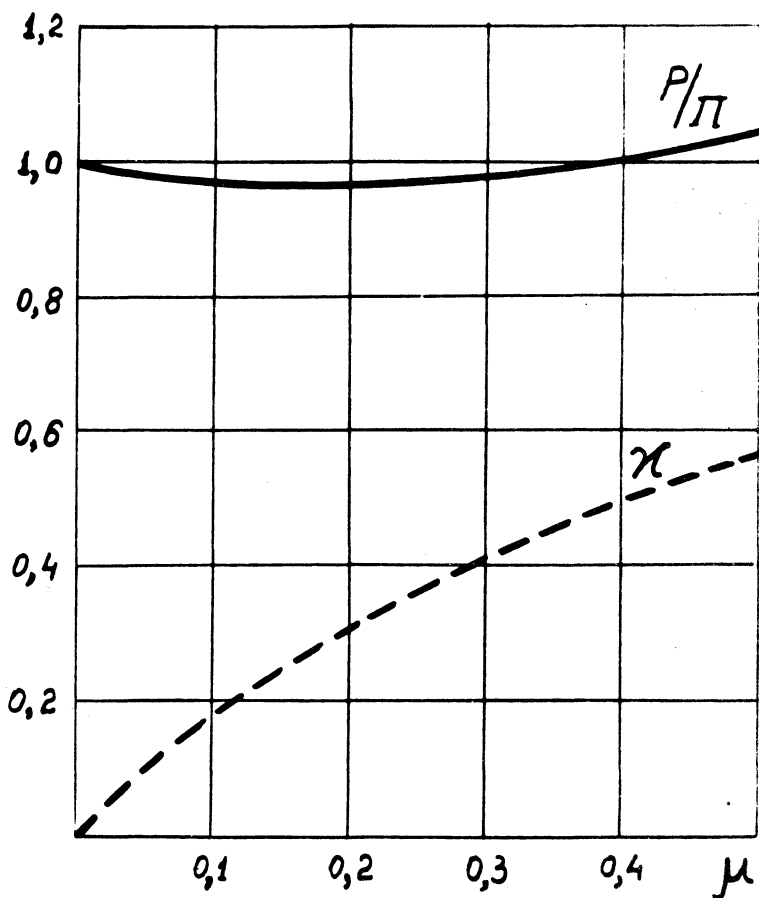
Б. Для сравнения с экспериментальными данными, имеющимися для трехсекторного циклотрона ФИАН /5/, был проведен расчет для геометрических параметров этого ускорителя. Особенность магнитной системы этого циклотрона ($N = 3$) состоит в том, что угловая ширина его секторов постоянна, $\theta_0 = 66\pi/180$, но их вершины сдвинуты от центра на радиус $R_0 = 5,00$ см; вертикальный зазор в секторах не зависит от радиуса: $2h = 4,00$ см. Для этого случая геометрические параметры μ и θ_n определяются по формулам (см. /7,8/)

$$\mu(R) = \frac{h}{R(\pi/N - \theta_0/2)} \times \frac{\sin(\pi/N - \theta_0/2)}{\sin\left\{\pi/N - \theta_0/2 + \arcsin\left[(R_0/R)\sin(\theta_0/2)\right]\right\}}, \quad (19)$$

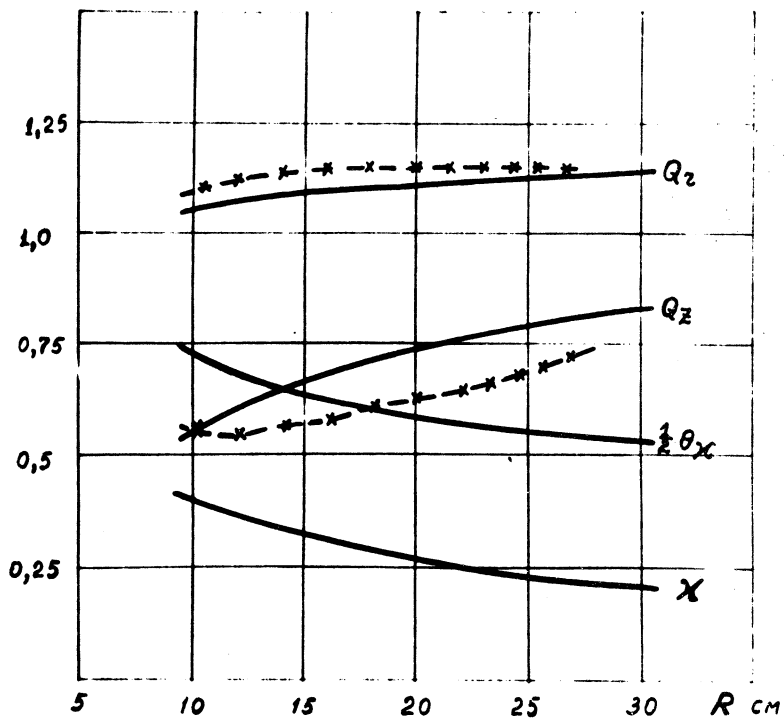
$$\theta_n(R) = 2\left\{\pi/N - \theta_0/2 + \arcsin\left[(R_0/R)\sin(\theta_0/2)\right]\right\}. \quad (20)$$

По полученным значениям μ и Π находились параметры ступенчатой аппроксимации $\alpha(\mu)$ и $r(\mu)$, а следовательно, и зависимости $\alpha(R)$ и $\theta_x(R)$. Эти последние затем подставлялись в известные формулы для частот бетатронных колебаний (см. /2/ или /5/). Полученные результаты приведены в форме графиков на рис. 4. Для сравнения там же показаны значения частот, приведенные в работе /5/ и полученные численными расчетами на ЭВМ по данным магнитных измерений.

Автор приносит глубокую благодарность Г. И. Харламовой за помощь в получении численных результа-



Р и с. 3. Зависимость параметров ступенчатой аппроксимации поля от геометрического параметра μ раздельно-секторной магнитной системы циклотрона.



Р и с. 4. Параметры ступенчатой аппроксимации и частоты бетатронных колебаний для трехсекторного циклотрона ФИАН. Сплошные кривые - расчет, пунктирные - эксперимент.

тов, а также Л. Н. Кацаурову и Л. П. Нечаевой, любезно предоставившим экспериментальные данные.

Поступила в редакцию
2 июня 1971 г.

Л и т е р а т у р а

1. E. M. Moroz, M. S. Rabinovich. Proc. CERN Symposium, 1, 547 (1956).
2. E. M. Мороз. Труды ФИАН, 13, 130 (1960).
3. E. M. Мороз. Атомная энергия, 28, вып. 2, 142 (1970).
4. G. Schatz. Nucl. Instr. and Meth., 72, 29 (1969).
5. Л. Н. Кацауров, Е. М. Мороз, Л. П. Нечаева. Препринт ФИАН № 139, 1970 г.
6. В. Н. Канунников. Краткие сообщения по физике, № 3, 33 (1970).
7. В. Н. Канунников. Препринт ФИАН, № 21, 1969 г.
8. В. Н. Канунников, А. А. Коломенский, В. А. Пападичев, А. П. Фатеев. Препринт ФИАН, № 150, 1970 г.