

ДИФФУЗИОННЫЙ РАСПАД ПЛАЗМЫ С  
КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ,  
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ПЛОТНОСТИ

И. Н. Иновенков, Д. П. Костомаров, О. И. Федянин

Одним из главных вопросов физики горячей плазмы является вопрос о механизме диффузии плазмы. В настоящее время накоплен весьма богатый экспериментальный материал по изучению диффузии в магнитных ловушках различного типа. Одним из основных экспериментальных параметров, с помощью которого определяется коэффициент диффузии, является так называемое "время жизни" плазмы  $\tau$ . Величина  $\tau$  характеризует постоянную спада плотности или энергии плазмы при экспоненциальном законе изменения их со временем. Однако следует отметить, что хотя экспоненциальная зависимость наиболее распространена для законов природы, сложность процессов, происходящих в плазме, может приводить и к другим закономерностям.

Во многих случаях для диффузионных процессов в плазме характерна пропорциональность коэффициента диффузии кулоновской частоте столкновений  $\nu_{ei}$ . Если при этом пространственные и временные изменения температуры плазмы оказываются менее существенными, чем изменение плотности, то ими можно пренебречь и считать, что коэффициент диффузии пропорционален плотности. Условия подобного типа довольно распространены в экспериментальных исследованиях.

Настоящая работа посвящена изучению особенностей диффузионного распада плазмы с "классическим" ко-

эффицентом диффузии ( $D \sim \nu_{ei}$ ).

Итак, рассмотрим уравнение диффузии для аксиально симметричного плазменного шнура, предполагая, что  $D = \alpha n$ . Введем безразмерные переменные

$$u = \frac{n}{n_0}, \quad x = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{a^2}{D_0}, \quad (1)$$

где  $a$  - радиус плазмы,  $n_0 = n_{\max}(r, 0)$  - некоторое характерное значение плотности,  $D_0 = \alpha n_0$  - соответствующее ему значение коэффициента диффузии.

В переменных (1) уравнение диффузии примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \tau < \infty. \quad (2)$$

Дополним его граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, \tau) = 0, \quad u(1, \tau) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad f_{\max}(x) = 1. \quad (4)$$

Уравнение (2) с граничными условиями (3) имеет частное решение вида /1,2/

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\lambda_0^2(\tau + \tau_0)} F(\lambda_0 x), \quad (5)$$

которое может быть получено методом разделения переменных. Здесь  $F(x)$  - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( s F \frac{dF}{ds} \right) + F = 0 \quad (6)$$

при дополнительных условиях  $F(0) = 1$ ,  $F'(0) = 0$ , для которого можно получить выражение в виде ряда по степеням  $s$ ,  $\lambda_0$  - корень функции  $F(s)$ ,  $\lambda_0 \approx 1,55$ . Если в задаче (2) - (4) начальное условие имеет вид

$$f(x) = F(\lambda_0 x), \quad (7)$$

то решение такой задачи будет даваться функцией (5) при  $\tau_0 = 1/\lambda_0^2 = 0,42$ .

При  $x \rightarrow 1$  функция  $F(\lambda_0 x)$  ведет себя, как  $\sqrt{1-x}$ , так что величина  $FdF/ds$  стремится к конечному пределу. В результате, несмотря на обращение коэффициента диффузии в ноль на границе плазменного шнура, существует диффузионный поток через границу и плотность убывает со временем (5).

Нелинейное уравнение диффузии в общем случае, для произвольной начальной функции распределения, не имеет аналитического решения. Задача о диффузии плазмы решалась численно для различного типа начальных условий  $f(x)$ . Рассматривались начальные распределения, близкие к реальным распределениям, встречающимся в эксперименте: бесселевское, "столообразное", локализация на оси, скинированное и т.п.

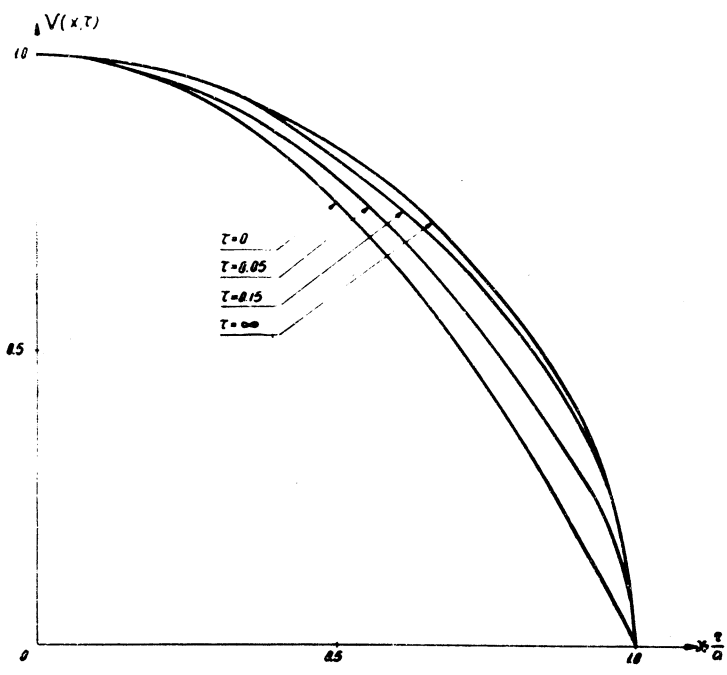
Проведенные расчеты показали, что с ростом времени распределение плотности, соответствующее любому начальному условию  $f(x)$ , асимптотически стремится к решению (5), в котором лишь величина  $\tau_0$  определяется видом начального распределения.

Остановимся в качестве примера на результатах расчетов подобного типа, соответствующих двум начальным распределениям: квадратичная парабола  $f_1(x)$  и неполное скиновое распределение  $f_2(x)$

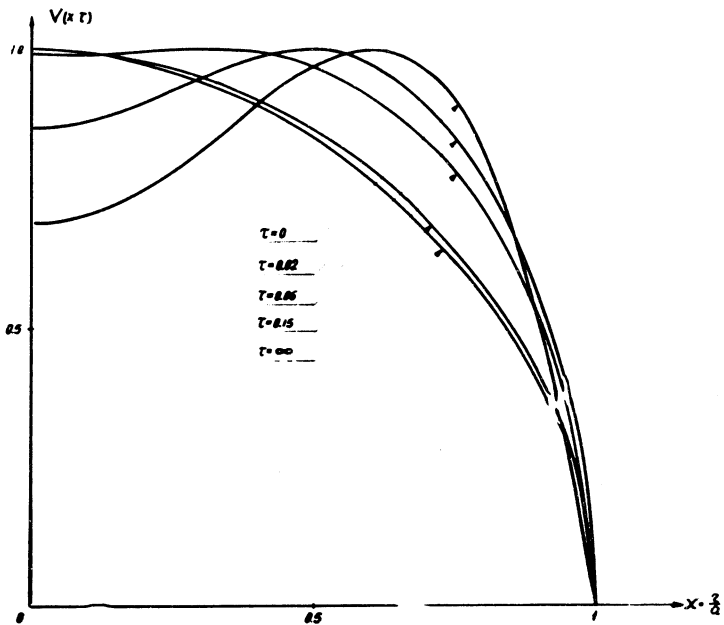
$$f_1(x) = 1 - x^2, \quad f_2(x) = 1 - \left( \frac{x^2 - 0,36}{0,64} \right)^2. \quad (8)$$

На рис. 1 и 2 показана временная эволюция профиля плотности в первом и втором случае. Для удобства сравнения профилей в различные моменты времени  $\tau$  приводятся графики нормированной функции  $V(x, \tau) = u(x, \tau) / u_{\max}(\tau)$ . Мы видим, что в обоих случаях с момента  $\tau = 0,15$  профили плотности практически совпадают с предельным профилем, соответствующим  $F(\lambda_0 x)$ . Отметим, что это время порядка времени установления асимптотического профиля в виде  $J_0(\mu_1 x)$  для линейного уравнения диффузии, когда  $\tau \sim 1/\mu_1^2 = 0,17$ , где  $\mu_1 = 2,40$  - первый корень функции Бесселя.

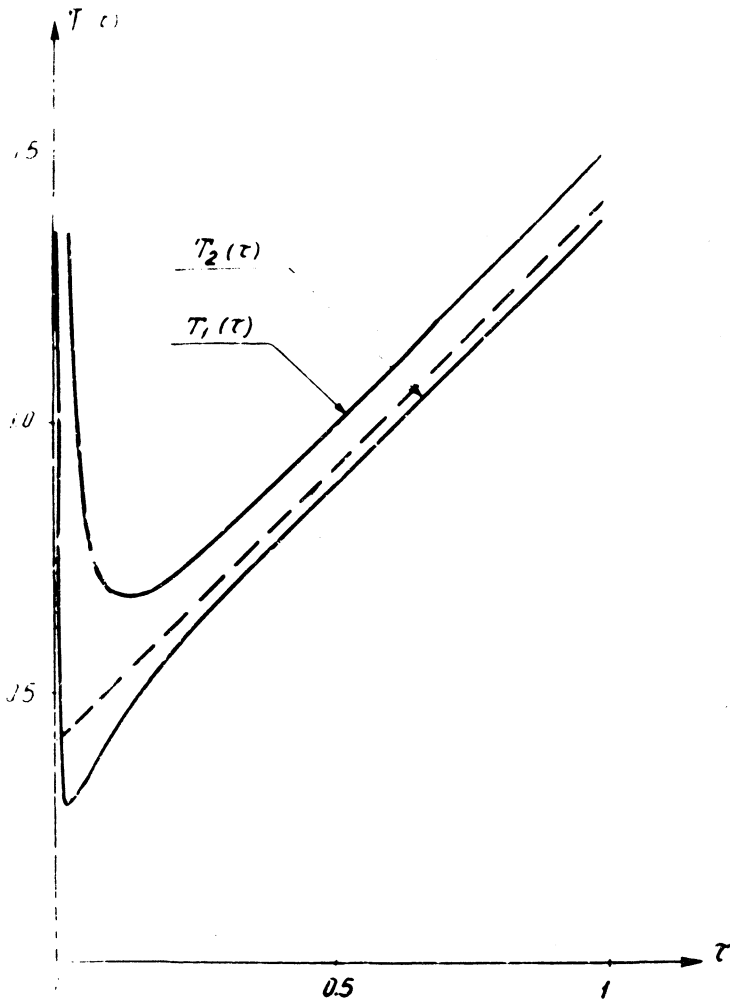
На рис. 3 для рассматриваемых решений показано



Р и с. 1. Распределение плотности плазмы по радиусу  $X$  в различные моменты времени  $\tau$  для  $V(x, 0) = 1 - x^2$ .



Р и с. 2. Распределение плотности плазмы по радиусу  $x$  в различные моменты времени  $\tau$  для  $V(x, 0) = 1 - [(x^2 - 0,36)/0,64]^2$ .



Р и с. 3. Зависимость времени жизни плазмы  $T$  от времени для различных начальных распределений.

изменение современем величины  $T(\tau) = -N(\tau)/N'(\tau)$ , которую обычно называют временем жизни. Здесь  $N(\tau) =$

$$= \int_0^1 u(x, \tau) dx - \text{величина, пропорциональная полному числу частиц.}$$

Для сравнения пунктиром нанесена прямая линия, соответствующая времени жизни для частного решения (5) при  $\tau_0 = 1/\lambda_0^2$ , соответствующем начальному условию (7).

Начальные функции (8) имеют конечные производные по  $x$  при  $x = 1$ . Следовательно, для соответствующих решений  $N'(0) = 0$  и  $T(0) = \infty$ . После перестройки профилей и выхода на асимптотическое решение (5) к моменту  $\tau = 0,15 T(\tau)$  становится линейной функцией  $\tau$ . Различие в высоте предельных прямых связано с тем, что величина  $\tau_0$  в предельном решении (5) зависит от начального условия  $f(x)$  и для различных решений оказывается различной.

Таким образом, в результате рассмотрения решения нелинейного уравнения диффузии с "классическим" коэффициентом диффузии для широкого класса начальных распределений показано, что с течением времени распределение плотности асимптотически приближается к частному решению уравнения диффузии. Время установления асимптотики  $\sim (0,15 \div 0,2)\tau_0$ , при  $\tau > 0,2\tau_0$  плотность плазмы изменяется обратно пропорционально времени.

Поступила в редакцию  
27 июня 1971 г.

#### Л и т е р а т у р а

1. В. Е. Голант, А. П. Жилинский. ЖТФ, 32, 1313 (1962).
2. С. Г. Алиханов, В. Е. Захаров, Г. Л. Хорасанов. Атомная энергия, 2, 137 (1963).